Bab 3

SISTEM PERSAMAAN LINIER

3.1. Pendahuluan

Pada kuliah ini akan dipelajari beberapa metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Penyelesaian sistem persamaan dengan jumlah variabel n yang tidak diketahui sering ditemui didalam ilmu rekayasa sipil.

Misalnya, ada suatu sistem persamaan yang akan dicari nilai $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ yang memenuhi persamaan berikut,

$$
\begin{gathered}
f_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\
f_2(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\
. \\
. \\
. \\
f_n(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0
\end{gathered}
$$

Sistem persamaan ini bisa merupakan sistem persamaan linier dan non linier. Untuk sistem persamaan non linier lebih rumit dari pada penyelesaian untuk sistem persamaan linier. Didalam pembahasan ini hanya akan dibahas sistem persamaan linier yang mempunyai bentuk umum sebagai berikut,

$$
\begin{gathered}
a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + ... + a_{1n}.x_n = b_1 \\
a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + ... + a_{2n}.x_n = b_2 \\
. \\
. \\
. \\
a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + a_{n3}.x_3 + ... + a_{nn}.x_n = b_n
\end{gathered}
$$

Dari persamaan di atas dapat disusun sistem persamaan sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & .. & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

dimana a adalah koefisien konstanta, b adalah konstanta, n adalah jumlah persamaan, dan x_1, x_2, $x_3, \dots, x_n$ adalah variabel bilangan yang tidak diketahui.

Sistem persamaan di atas merupakan matriks dengan n persamaan dengan n bilangan yang tidak diketahui. Matriks dari sistem persamaan di atas membentuk matriks $n \times n$ yang merupakan matriks bujur sangkar. Sistem persamaan yang akan dibahas selanjutnya hanya sistem persamaan yang membentuk matriks bujur sangkar.

3.1. Tipe Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar paling banyak dipergunakan di dalam penyelesaian sistem persamaan linier. Untuk mendapatkan penyelesaian di dalam sistem persamaan tersebut jumlah persamaan (baris) dan jumlah bilangan yang tidak diketahui (kolom) harus sama. Beberapa tipe dari matriks bujur sangkar adalah sebagai berikut,

1. Matriks Simetris
2. Matriks Diagonal
3. Matriks Identitas
4. Matriks Segitiga atas
5. Matriks Segitiga bawah
6. Matriks Pita atau Matriks Tridiagonal

Matriks Simetris

Dikatakan suatu matriks merupakan matriks simetris apabila koefisien matriks $a_{ij} = a_{ji}$. Contohnya matriks 3 x 3 berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks Diagonal

Dikatakan suatu matriks merupakan matriks diagonal apabila semua elemen selain elemen diagonal dari matriks tersebut adalah bernilai nol. Contoh matriks diagonal adalah sebagai berikut,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks Identitas

Dikatakan suatu matriks merupakan matriks identitas apabila semua elemen dari matriks tersebut bernilai nol dan elemen diagonal utama dari matriks tersebut bernilai 1.

Matriks Segitiga Atas

Dikatakan suatu matriks merupakan matriks segitiga atas bila semua elemen dibawah diagonal utmanya adalah sama dengan nol. Contoh matriks segitiga atas adalah sebagai berikut,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga Bawah

Dikatakan suatu matriks merupakan matriks segitiga bawah bila semua elemen diatas diagonal utmanya adalah sama dengan nol. Contoh matriks segitiga bawah adalah sebagai berikut,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks Pita atau Matriks Tridiagonal

Dikatakan suatu matriks merupakan matriks Pita bila semua elemen adalah sama dengan nol, kecuali pada satu jalur yang perpusat pada diagonal utama. Contoh matriks pita adalah sebagai berikut,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks Transpose

Matriks transpose adalah matriks yang terbentuk dengan mengganti baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Misalnya diketahui sebuah matriks sebagai berikut,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

maka transpose dari matriks di atas adalah sebagai berikut,

$$B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks Invers

Didalam operasi matriks, pembagian matriks tidak didefinisikan. Operasi perhitungan matriks yang mirip dengan pembagian matriks disebut dengan Matriks Invers. Matriks tersebut dapat dipresentasikan sebagai berikut,

$$A^{-1} = \frac{I}{A}$$

3.2. Operasi Matriks

Operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dapat dilakukan pada matriks.

Operasi Penjumlahan Matriks

Apabila $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ dan $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ adalah dua matriks $m \times n$, maka operasi penjumlahan dapat dilakukan pada kedua matriks tersebut. Contoh dari penjumlahan matriks adalah sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+1 & 5+2 & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Operasi Pengurangan Matriks

Apabila $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ dan $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ adalah dua matriks $m \times n$, maka operasi pengurangan dapat dilakukan pada kedua matriks tersebut. Contoh dari pengurangan matriks adalah sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-7 & 2-8 & 3-9 \\ 4-1 & 5-2 & 6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Operasi Perkalian Matriks

Apabila $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ dan $C = \lfloor c_{ji} \rfloor$ adalah matriks $m \times n$ dan matriks $n \times m$, maka operasi perkalian dapat dilakukan pada kedua matriks tersebut. Contoh dari perkalian matriks adalah sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \times C = \begin{bmatrix} 1\times 7 + 2\times 8 + 3\times 9 & 1\times 1 + 2\times 2 + 3\times 3 \\ 4\times 7 + 5\times 8 + 6\times 9 & 4\times 1 + 5\times 2 + 6\times 3 \end{bmatrix}$$

$$A \times C = \begin{bmatrix} 7+16+27 & 1+4+9 \\ 28+40+54 & 4+10+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 14 \\ 122 & 32 \end{bmatrix}$$

3.3. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Dalam menyelesaikan sistem persamaan linier ada beberapa metode yang dapat dipergunakan. Dilihat dari cara penyelesaiannya, metode-metode tersebut dapat dibagi menjadi 2 tipe,

1. Metode Analisis

   Metode ini menghasilkan nilai eksak.

   a. Metode Eliminasi Gauss

   b. Metode Gauss Jordan

2. Metode Iterasi

   Metode ini menghasilkan nilai pendekatan.

   a. Metode Jacobi

   b. Metode Gauss-Siedal

<u>Metode Eliminasi Gauss</u>

Metode Eliminasi Gauss ini adalah salah satu cara yang paling awal dan banyak dipergunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier. Metode penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah sebagai berikut, misalnya diketahui suatu sistem persamaan linier dalam bentuk matriks 3×3, penyelesaian akhir dari sistem persamaan tersebut menghasilkan matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Dimana matriks dari persamaan tersebut dieliminasi sedemikian rupa sehingga menjadi bentuk matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah. Dari matriks segitiga tersebut penyelesaian untuk untuk x, y, dan z dapat dilakukan dengan mudah.

Untuk mendapatkan hasil akhir seperti matriks tersebut di atas maka apabila diketahui suatu sistem persamaan linier matriks 3×3, lakukan beberapa langkah perhitungan berikut,

$$\begin{array}{l} \text{baris 1} \\ \text{baris 2} \\ \text{baris 3} \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \text{baris } 2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \times \text{baris } 1 \\ \text{baris } 3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} \times \text{baris } 1 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{baris } 3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} \times \text{baris } 2 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{bmatrix}$$

Dari prosedur eliminasi tersebut didapat hasil yang berupa matriks segitiga atas. Setelah itu penyelesaian untuk mencari nilai x, y, dan z dapat dilakukan dengan mudah.

Metode Gauss Jordan

Metode Gauss Jordan ini adalah metode yang paling banyak dipergunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier. Metode penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah sebagai berikut: Misalnya diketahui suatu sistem persamaan linier dalam bentuk matriks 3×3. Penyelesaian dari sistem persamaan ini adalah seperti prosedur tersebut,

$$\begin{array}{l} \text{baris 1} \\ \text{baris 2} \\ \text{baris 3} \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{baris } 1 / a_{11} \\ \text{baris } 2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \times \text{baris } 1 \\ \text{baris } 3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} \times \text{baris } 1 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{l} \text{baris 1} \\ \text{baris 2} \\ \text{baris 3} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{baris } 1 - \frac{a'_{12}}{a'_{22}} \times \text{baris } 2 \\ \text{baris } 2 / a'_{22} \\ \text{baris } 3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} \times \text{baris } 2 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{l} \text{baris 1} \\ \text{baris 2} \\ \text{baris 3} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a''_{13} \\ 0 & 1 & a''_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ b''_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{baris } 1 - \frac{a''_{13}}{a''_{33}} \times \text{baris } 3 \\ \text{baris } 2 - \frac{a''_{23}}{a''_{33}} \times \text{baris } 3 \\ \text{baris } 3 / a''_{33} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{l} \text{baris 1} \\ \text{baris 2} \\ \text{baris 3} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'''_1 \\ b'''_2 \\ b'''_3 \end{bmatrix}$$

Hasil akhir sistem persamaan dengan menggunakan metode Gauss Jordan ini merupakan solusi langsung untuk nilai x, y, dan z. Oleh karena itu metode ini paling banyak dipergunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier.

Metode Jacobi

Metode ini merupakan metode iteratif yang penyelesaian akhirnya merupakan nilai pendekatan. Untuk memahami prosedur penyelesaian dari metode ini, lihat contoh berikut. Misalnya diketahui suatu sistem persamaan,

$$\begin{aligned} a_{11}.x + a_{12}.y + a_{13}.z &= b_1 \\ a_{21}.x + a_{22}.y + a_{23}.z &= b_2 \\ a_{31}.x + a_{32}.y + a_{33}.z &= b_3 \end{aligned}$$

Prosedur untuk menghitung nilai x, y, dan z adalah sebagai berikut,

Langkah 1:

Asumsi nilai awal x, y, dan z sama dengan nol.

Langkah 2:

Hitung nilai x, y, dan z dari persamaan berikut,

$$x = \frac{b_1 - a_{12}.y - a_{13}.z}{a_{11}}$$
$$y = \frac{b_2 - a_{21}.x - a_{23}.z}{a_{22}}$$
$$z = \frac{b_3 - a_{31}.x + a_{32}.y}{a_{33}}$$

Langkah 3:

Jika nilai pendekatan baru untuk x, y, dan z kurang akurat, lakukan lagi perhitungan Langkah 2 sampai didapat nilai pendekatan x, y, dan z yang cukup teliti.

Metode Gauss Siedal

Metode ini juga merupakan metode iteratif yang penyelesaian akhirnya merupakan nilai pendekatan. Metode ini lebih banyak dipergunakan dari Metode Jacobi. Untuk memahami prosedur penyelesaian dari metode ini lihat contoh berikut. Misalnya diketahui suatu sistem persamaan berikut,

$$
\begin{aligned}
a_{11}.x + a_{12}.y + a_{13}.z &= b_1 \\
a_{21}.x + a_{22}.y + a_{23}.z &= b_2 \\
a_{31}.x + a_{32}.y + a_{33}.z &= b_3
\end{aligned}
$$

Prosedur untuk menghitung nilai x, y, dan z adalah sebagai berikut,

Langkah 1:

Asumsikan nilai awal dari variabel y dan z sama dengan nol.

Langkah 2:

Dengan menggunakan nilai y dan z hitung nilai x dari persamaan pertama,

$$x = \frac{b_1 - a_{12}.y - a_{13}.z}{a_{11}}$$

Langkah 3:

Dengan mennggunakan nilai x, dan z hitung nilai y dari persamaan kedua,

$$y = \frac{b_2 - a_{21}.x - a_{23}.z}{a_{22}}$$

Langkah 4:

Dengan menggunakan nilai x, dan y hitung nilai z dari persamaan ketiga,

$$z = \frac{b_3 - a_{31}.x + a_{32}.y}{a_{33}}$$

Langkah 5:

Jika nilai pendekatan baru untuk x, y, dan z kurang akurat, lakukan lagi perhitungan Langkah 2, 3, dan 4 sampai didapat nilai pendekatan x, y, dan z yang cukup teliti.