PENDAHULUAN

Metode numerik merupakan suatu teknik atau cara untuk menganalisa dan menyelesaikan masalah – masalah di dalam bidang rekayasa teknik dan sain dengan menggunakan operasi perhitungan matematik. Masalah-masalah tersebut biasanya diidealkan dan diformulasikan secara matematis. Operasi perhitungan matematik di dalam metode numerik ini biasanya dilakukan secara berulang ulang. Bila dilakukan secara manual operasi perhitungan ini akan membutuhkan waktu yang sangat lama. Oleh karena itu, untuk operasi perhitungan metode numerik diperlukan bantuan komputer. Dengan bantuan komputer operasi perhitungan yang dilakukan berulang-ulang dapat diselesaikan dengan sangat cepat.

Metode numerik sudah lama sejak lama dikembangkan orang. Akan tetapi pada awal perkembangannya aplikasi metode tersebut dalam menyelesaikan permasalahan masih sangatlah jarang. Hal ini disebabkan karena alat bantu operasi perhitungan matematik, yaitu komputer masih sangatlah kurang. Setelah perkembangan teknologi komputer semakin pesat dan pemakaian komputer sudah semakin meluas, metode numerik ini menjadi metode yang handal untuk menganalisa dan menyelesaikan masalah-masalah yang terjadi dalam segala bidang ilmu pengetahuan. Masalah-masalah yang dapat diselesaikan dengan metode numerik tersebut tidak hanya masalah sederhana yang masih dapat diselesaikan secara analitis, akan tetapi juga masalah-masalah kompleks yang tidak dapat lagi diselesaikan secara analitis.

Pada awalnya metode numerik banyak diperkenalkan oleh para ahli matematik. Akan tetapi selanjutnya dalam perkembangan metode numerik juga banyak konstribusi dari ahli rekayasa sipil, mesin, elektro, ekonomi, sosial dan bidang ilmu lainnya.

Didalam metode numerik, permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis merupakan suatu pendekatan. Akurasi perhitungan dari permasalahan yang didekati secara matematis sangat tergantung pada asumsi-asumsi yang diberikan. Misalnya, untuk aliran air sungai satu dimensi, profil kecepatan setiap titik hitung diasumsikan sama. Semakin akurat data yang dipergunakan untuk perhitungan operasi matematik dan semakin sedikit asumsi yang diberikan maka pendekatan akan memberikan hasil yang lebih baik. Ukuran akurasi dari pendekatan ini lebih dikenal dengan nama *error* atau kesalahan.

Kesalahan (*error*)

Hasil operasi perhitungan matematik dari persamaan matematik (yang merupakan pemodelan dari permasalahan) merupakan suatu perkiraan yang mendekati nilai eksak, apabila persamaan tersebut dapat diselesaikan secara analitis.

Tiga macam kesalahan dalam operasi perhitungan matematik adalah sebagai berikut,

1. kesalahan bawaan
2. kesalahan pembulatan
3. kesalahan pemotongan

Kesalahan bawaan adalah suatu kesalahan yang terjadi karena kesalahan input data yang dipergunakan untuk perhitungan. Kesalahan ini terjadi karena kurang telitinya pencatatan data dari lapangan maupun pencatatan dari data primer dan sekunder.

Kesalahan pembulatan terjadi karena pemotongan desimal dari bilangan yang diperhitungkan, baik untuk input data maupun pada waktu operasi perhitungan matematik. Contoh dari kesalahan pembulatan ini adalah sebagai berikut:

2,71828183 dibulatkan menjadi 2,71
3,14159265 dibulatkan menjadi 3,14

Kesalahan pemotongan terjadi karena didalam operasi matematik tidak dilakukan prosedur perhitungan matematik yang sesuai dengan pemodelannya. Misalnya suatu persamaan tak hingga dimodelkan menjadi persamaan berhingga seperti pendekatan untuk metode beda hingga yang diturunkan dari deret Taylor.

Kesalahan Absolut dan kesalahan Relatif

Kesalahan Absolut dapat dipresentasikan sebagai berikut,

$$E_e = |p - p*|$$

dimana:

E_e	=	kesalahan absolut
p	=	nilai eksak
$p*$	=	pendekatan nilai eksak

Kesalahan relatif dapat (ε_{exact}) dipresentasikan sebagai berikut,

$$\varepsilon_e = \frac{E_e}{p}.100\,\%$$

Jika nilai eksak tidak diketahui, perhitungan kesalahan relatif ($\varepsilon_{approximate}$) juga dapat ditulis sebagai berikut,

$$\varepsilon_a = \frac{E_a}{p*}.100\,\%$$

perhitungan kesalahan relatif juga dapat dipresentasikan,

$$\varepsilon_a = \frac{|p_*^{n+1} - p_*^n|}{p_*^n}.100\,\%$$

Deret Taylor

Pendekatan fungsi $f(x+\Delta x)$ dan fungsi $f(x-\Delta x)$ dengan menggunakan deret Taylor dapat dipresentasikan sebagai berikut,

Pendekatan untuk $f(x+\Delta x)$,

$$f(x+\Delta x)= f(x)+\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\Delta x}{1!}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{(\Delta x)^2}{2!}+\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{(\Delta x)^3}{3!}+\ldots+\frac{\partial^n f}{\partial x^n}.\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

Pendekatan untuk $f(x-\Delta x)$,

$$f(x-\Delta x)= f(x)-\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\Delta x}{1!}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{(\Delta x)^2}{2!}-\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{(\Delta x)^3}{3!}+\ldots+\frac{\partial^n f}{\partial x^n}.\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

1. Pendekatan untuk satu suku pertama (orde nol) dapat ditulis sebagai,

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+\mathrm{O}(x)$$

2. Pendekatan untuk dua suku pertama (orde satu) dapat ditulis sebagai,

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\Delta x}{1!}+\mathrm{O}(x^2)$$

dari pendekatan ini dapat diturunkan,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\approx\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\mathrm{O}(x^2)$$

3. Pendekatan untuk tiga suku pertama (orde dua) dapat ditulis sebagai,

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \mathrm{O}(x^3)$$

dari pendekatan di atas dapat diturunkan,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx 2.\left\{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(\Delta x)^2} - \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{1}{\Delta x}\right\} + \mathrm{O}(x^3)$$

Berdasarkan fungsi $f(x+\Delta x)$ dan fungsi $f(x-\Delta x)$, turunan kedua $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$ dari fungsi $f(x)$ dapat dapat disusun sebagai berikut,

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}.\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

$$f(x-\Delta x) \approx f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}.\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

____ +

$$f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) \approx 2.f(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.(\Delta x)^2 + \mathrm{O}(x^3)$$

Kesalahan pendekatan dari persamaan di atas dapat dijabarkan sebagai berikut,

$$\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{\text{Nilai eksak}} \approx \underbrace{\frac{f(x+\Delta x) - 2.f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}}_{\text{Nilai pendekatan}} + \underbrace{\mathrm{O}(x^3)}_{\textit{Error}}$$

Dari persamaan di atas dapat dibuat sebagai berikut,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{1.f(x+\Delta x) - 2.f(x) + 1.f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

lebih sederhana persamaan ini dapat disusun sebagai berikut,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{1.f_{i+1} - 2.f_i + 1.f_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

dimana: 1, 2, dan 1 merupakan koefisien pemberat beda hingga

Persamaan ini merupakan persamaan pendekatan turunan kedua fungsi $f(x)$ dengan derajad kesalahan atau akurasi orde dua. Persamaan di atas dikenal sebagai persamaan pendekatan metode beda hingga (*finite-difference*) yang merupakan pendekatan beda hingga terpusat (*central differences*).

Dengan cara yang sama dapat dibuat tabel pendekatan metode beda hingga untuk berbagai turunan dan akurasi sebagai berikut:

Tabel 1. koefisien pemberat pendekatan beda hingga untuk akurasi orde 2

	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}
$2.\Delta x.\frac{\partial f}{\partial x}$		-1	0	1	
$(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$		1	-2	1	
$2.(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	-1	2	0	-2	1
$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	1	-4	6	-4	1
central differences $O(\Delta x)^2$					

Tabel 2. koefisien pemberat pendekatan beda hingga untuk akurasi orde 4

	f_{i-3}	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}	f_{i+3}
$12.\Delta x.\frac{\partial f}{\partial x}$		1	-8	0	-8	1	
$12.(\Delta x)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$		-1	16	-30	16	-1	
$8.(\Delta x)^3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	1	-8	13	0	-13	8	-1
$6.(\Delta x)^4\,\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	-1	12	-39	56	-39	12	-1
central differences $\mathrm{O}(\Delta x)^4$							

Problem Set:

1. Dari Tabel 1 diketahui bahwa pendekatan beda hingga untuk turunan orde tiga adalah sebagai berikut,

$$2.(\Delta x)^3.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -1.f_{i-2} + 2.f_{i-1} + 0.f - 2.f_{i+1} + 1.f_{i+2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{-1.f_{i-2} + 2.f_{i-1} + 0.f - 2.f_{i+1} + 1.f_{i+2}}{2.(\Delta x)^3}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{-\frac{1}{2}.f_{i-2} + 1.f_{i-1} - 1.f_{i+1} + \frac{1}{2}.f_{i+2}}{(\Delta x)^3}$$

Diminta: Buktikan persamaan tersebut di atas

Jawab:

Dari deret Taylor dapat disusun persamaan sebagai berikut,

$$f\left(x+2\Delta x\right)= f\left(x\right)+\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{2\Delta x}{1!}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{\left(2\Delta x\right)^2}{2!}+\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{\left(2\Delta x\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\partial^n f}{\partial x^n}.\frac{\left(2\Delta x\right)^n}{n!} \qquad (1)$$

$$f\left(x+\Delta x\right)= f\left(x\right)+\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\Delta x}{1!}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{\left(\Delta x\right)^2}{2!}+\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{\left(\Delta x\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\partial^n f}{\partial x^n}.\frac{\left(\Delta x\right)^n}{n!} \qquad (2)$$

$$f\left(x-\Delta x\right)= f\left(x\right)-\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\Delta x}{1!}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{\left(\Delta x\right)^2}{2!}-\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{\left(\Delta x\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\partial^n f}{\partial x^n}.\frac{\left(\Delta x\right)^n}{n!} \qquad (3)$$

$$f\left(x-2\Delta x\right)= f\left(x\right)-\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{2\Delta x}{1!}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{\left(2\Delta x\right)^2}{2!}-\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{\left(2\Delta x\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\partial^n f}{\partial x^n}.\frac{\left(2\Delta x\right)^n}{n!} \qquad (4)$$

Substitusi persamaan (2) dan (3) didapat persamaan (A) berikut,

(2) – (3)

$$f\left(x+\Delta x\right)- f\left(x-\Delta x\right)\approx 2\Delta x\frac{\partial f}{\partial x}.+2\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{\left(\Delta x\right)^3}{3!} \qquad (A)$$

Substitusi persamaan (1) dan persamaan (4) didapat persamaan (B),

(1) – (4)

$$f\left(x+2\Delta x\right)- f\left(x-2\Delta x\right)\approx 4\Delta x\frac{\partial f}{\partial x}.+2\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{\left(2\Delta x\right)^3}{3!} \qquad (B)$$

Substitusi persamaan (A) dan (B) didapat persamaan berikut,

$$2(\mathrm{A})-(\mathrm{B})$$

$$2f(x+\Delta x)-2f(x-\Delta x)-f(x+2\Delta x)+f(x-2\Delta x)\approx(4-16)\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{(\Delta x)^3}{3!}$$

$$2f(x+\Delta x)-2f(x-\Delta x)-f(x+2\Delta x)+f(x-2\Delta x)\approx-2(\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.$$

$$2(\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\approx-f(x-2\Delta x).+2f(x-\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x+2\Delta x)$$

$$2(\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\approx-f_{i-2}+2f_{i-1}-2f_{i+1}+f_{i+2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\approx\frac{-f_{i-2}+2f_{i-1}-2f_{i+1}+f_{i+2}}{2(\Delta x)^3}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\approx\frac{-\frac{1}{2}.f_{i-2}+1.f_{i-1}-1.f_{i+1}+\frac{1}{2}.f_{i+2}}{(\Delta x)^3}$$

$\therefore$ Terbukti bahwa pendekatan beda hingga untuk turunan ketiga $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)$ adalah sebagai berikut,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\approx\frac{-\frac{1}{2}.f_{i-2}+1.f_{i-1}-1.f_{i+1}+\frac{1}{2}.f_{i+2}}{(\Delta x)^3}$$

2. Dari Tabel 2 diketahui bahwa pendekatan beda hingga untuk turunan orde dua dengan akurasi orde empat adalah sebagai berikut,

$$12.(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx -1 f_{i-2} + 16 f_{i-1} - 30 f_i + 16 f_{i+1} - 1 f_{i+2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{-1 f_{i-2} + 16 f_{i-1} - 30 f_i + 16 f_{i+1} - 1 f_{i+2}}{12.(\Delta x)^2}$$

Diminta: Buktikan persamaan tersebut di atas!

Jawab:

Dari deret Taylor dapat disusun persamaan sebagai berikut,

$$f(x+2\Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{2\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{(2\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{(2\Delta x)^3}{3!} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}.\frac{(2\Delta x)^4}{4!} + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}.\frac{(2\Delta x)^n}{n!} \quad (1)$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}.\frac{(\Delta x)^4}{4!} + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}.\frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad (2)$$

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}.\frac{(\Delta x)^4}{4!} + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}.\frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad (3)$$

$$f(x-2\Delta x) = f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{2\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{(2\Delta x)^2}{2!} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.\frac{(2\Delta x)^3}{3!} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}.\frac{(2\Delta x)^4}{4!} + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}.\frac{(2\Delta x)^n}{n!} \quad (4)$$

Substitusikan persamaan (2) dan (3),

(2) + (3)

$$f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) \approx 2.f(x) + 2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{(\Delta x)^2}{2!} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}.\frac{(\Delta x)^4}{4!} \quad (A)$$

Substitusikan persamaan (1) dan (4),

(1) + (4)

$$f(x+2\Delta x)+f(x-2\Delta x)\approx 2.f(x)+2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{(2\Delta x)^2}{2!}+2\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}.\frac{(2\Delta x)^4}{4!} \qquad \text{(B)}$$

Substitusi persamaan (A) dan (B),

$16.(\mathrm{A})-(\mathrm{B})$

$$16f(x+\Delta x)+16f(x-\Delta x)-f(x+2\Delta x)-f(x-2\Delta x)\approx$$

$$(16.2-2)f(x)+(16-4).\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.(\Delta x)^2+(16-16).2\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}.\frac{(\Delta x)^4}{4!}$$

$$16f(x+\Delta x)+16f(x-\Delta x)-f(x+2\Delta x)-f(x-2\Delta x)\approx 30f(x)+12\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.(\Delta x)^2$$

$$12\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.(\Delta x)^2\approx -f(x-2\Delta x)+16f(x-\Delta x)-30f(x)+16f(x+\Delta x)-f(x+2\Delta x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\approx\frac{-f(x-2\Delta x)+16f(x-\Delta x)-30f(x)+16f(x+\Delta x)-f(x+2\Delta x)}{12.(\Delta x)^2}$$

$\therefore$ Terbukti bahwa pendekatan beda hingga untuk turunan kedua $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$ untuk akurasi orde empat adalah sebagai berikut,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\approx\frac{-f_{i-2}+16f_{i-1}-30f_i+16f_{i+1}-f_{i+2}}{12.(\Delta x)^2}$$