Bab 2

AKAR-AKAR PERSAMAAN

Pada kuliah ini akan dipelajari beberapa metode untuk mencari akar-akar dari suatu persamaan yang kontinu. Untuk persamaan polinomial derajat 2, persamaannya dapat diselesaikan dengan rumus persamaan kuadrat yang sangat sederhana.

Contoh persamaan polinomial derajat 2 adalah sebagai berikut:

$$f(x) = a.x^2 + b.x - c$$

dari persamaan di atas, penyelesaian agar $f(x) = 0$ atau untuk mendapatkan akar-persamaannya, secara analitis dapat diselesaikan dengan rumus berikut,

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Untuk persamaan polinomial derajat 3 atau yang lebih tinggi, rumus-rumus di atas tidak dapat digunakan atau rumus-rumus penyelesaian untuk persamaan polinomial tersebut menjadi sangat kompleks. Contoh bentuk dari persamaan-persamaan polinomial tersebut adalah sebagai berikut,

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

$$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$$

$$f(x) = e^x - x - 1$$

$$f(x) = \frac{3.x + \cos x - e^x}{\ln x} - x - 1$$

Bentuk-bentuk persamaan polinomial di atas tidak dapat diselesaikan secara eksplisit. Akan tetapi persamaan polinomial ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik.

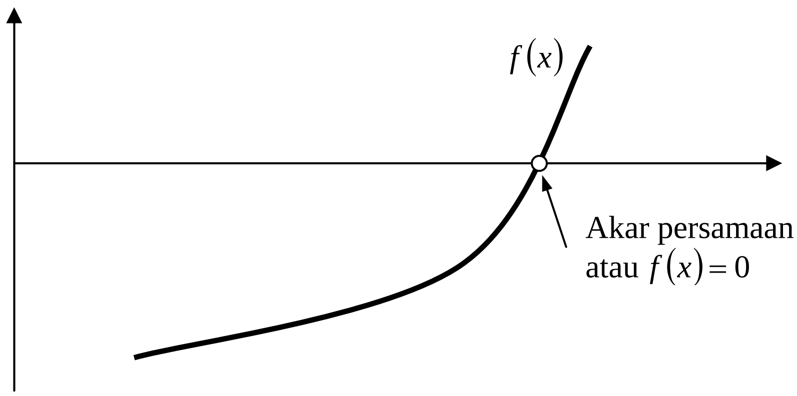
Penyelesaian numerik untuk persamaan-persamaan polinomial derajat 3 atau lebih dan persamaan-persamaan polinomial yang kompleks dilakukan dengan metode pendekatan. Proses perhitungan metode pendekatan ini dilakukan dengan cara iterasi. Dengan melakukan produr perhitungan yang berulang-ulang nilai pendekatan penyelesaian persamaan tersebut didapat. Semakin banyak prosedur iterasi yang dilakukan maka nilai pendekatan penyelesaian semakin mendekati hasil eksak.

Metode-metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan polinomial derajat 3 dan persamaan polinomial yang lebih kompleks adalah sebagai berikut,

1. Cara coba-coba
2. Metode Setengah Interval
3. Metode Interpolasi Linier
4. Metode Newton-Raphson
5. Metode Secant

2.1. Cara coba-coba

Cara ini adalah salah satu cara yang paling sederhana dan paling banyak dipergunakan untuk menyelesaikan akar-akar persamaan polinomial yang kompleks. Langkah pertama dari penyelesaian ini adalah dengan menggambarkan kurva dari persamaan atau fungsi tersebut. Dari kurva persamaan ini dapat dilihat posisi nilai x untuk fungsi $f(x) = 0$ (lihat Gambar 1.). Dengan memasukkan nilai x dengan cara coba-coba kita dapat menghitung pendekatan untuk nilai fungsi $f(x)=0$. Dengan metode ini lama waktu perhitungan dan akurasi pendekatan nilai tidak dapat diprediksi.



Gambar 1. akar persamaan dari kurva fungsi $f(x)=0$

2.2. Metode Setengah Interval

Metode setengah interval adalah metode yang paling sederhana diantara metode-metode yang akan dibahas selanjutnya. Langkah-langkah penyelesaian untuk metode setengah interval adalah sebagai berikut,

1. Gambar kurva fungsi persamaan polinomial fungsi $f(x)$
2. Tentukan nilai x_i dan hitung fungsi $f(x_i)$
3. Tentukan nilai nilai x_{i+1} dan hitung fungsi $f(x_{i+1})$
4. Apakah persamaan $f(x_i)\times f(x_{i+1})<0$ dipenuhi
5. Jika persamaan di atas tidak dipenuhi ulangi prosedur no.2 dan jika persamaan di atas dipenuhi, maka hitung,

$$x_n = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \tag{1}$$

6. Setelah didapat persamaan (1), hitung persamaan berikut,
   a. Jika persamaan $f(x_i)\times x_n < 0$ dipenuhi, $f(x_{i+1}) = x_n$
   b. persamaan $f(x_{i+1})\times x_n < 0$ dipenuhi, $f(x_i) = x_n$
7. Hitung pendekatan baru akar persamaan dari fungsi tersebut dengan,

$$x_n = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

8. Jika nilai pendekatan yang baru belum cukup teliti maka lakukan lagi prosedur perhitungan no.2. Apabila nilai pendekatan baru yang didapat sudah cukup teliti atau nilai dari persamaan polinomial atau fungsi $f(x) \approx 0$, maka hitungan selesai dan x_n merupakan akar persamaan yang dicari.

2.3. Metode Interpolasi Linier

Metode Setengah Interval merupakan metode numerik yang sangat sederhana untuk mencari akar-akar persamaan polinomial. Metode Setengah Interval tidak efisien bila dibandingkan dengan Metode Interpolasi Linier. Hal ini karena untuk mendapatkan nilai pendekatan yang cukup teliti dibutuhkan prosedur iterasi yang cukup panjang dan memakan waktu relatif lebih lama bila dibandingkan dengan Metode Interpolasi Linier. Metode Interpolasi Linier didasarkan pada interpolasi antara dua nilai dari fungsi yang mempunyai tanda yang berlawanan. Metode setengah interval adalah sebagai berikut,

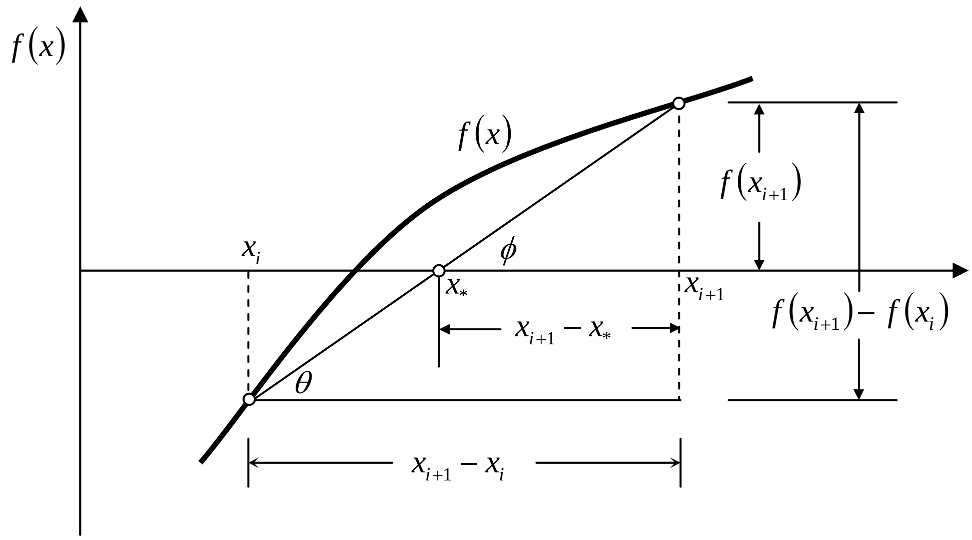
1. Gambar kurva fungsi persamaan polinomial fungsi $f(x)$
2. Tentukan nilai x_i dan hitung fungsi $f(x_i)$
3. Tentukan nilai x_{i+1} dan hitung fungsi $f(x_{i+1})$ dan fungsi $f(x_{i+1})$ harus mempunyai nilai yang berlawanan dengan $f(x_i)$.
4. Untuk selanjutnya penyelesaian dapat diturunkan sebagai berikut (lihat Gambar 2),

$$\tan\phi = \tan\theta \qquad (2)$$

$$\tan\phi = \tan\theta = \frac{f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_*} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\frac{f(x_{i+1})}{f(x_{i+1})-f(x_i)}(x_{i+1}-x_i)=x_{i+1}-x_*$$

$$x_* = x_{i+1} - \frac{f(x_{i+1})}{f(x_{i+1})-f(x_i)}(x_{i+1}-x_i) \tag{3}$$

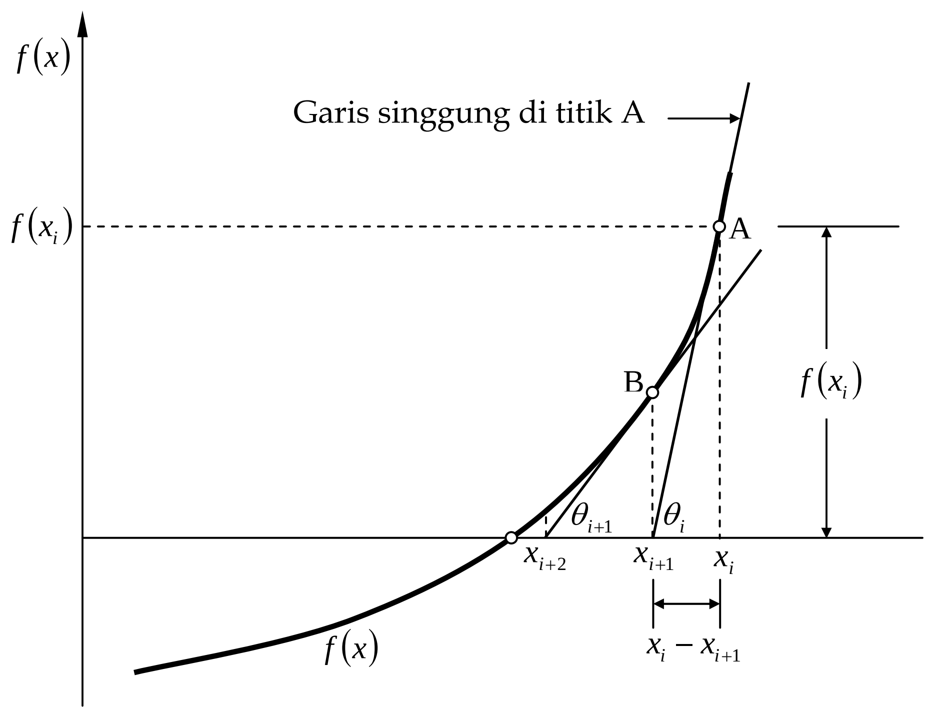


Gambar 2. Metode Interpolasi Linier

5. Setelah didapat nilai x_* kemudian dihitung nilai x_*.
6. Setelah dihitung nilai $f(x_x)$, hitung persamaan berikut,
   a. Jika persamaan $f(x_i)\times x_* < 0$ dipenuhi, $\Rightarrow$ $f(x_{i+1}) = x_*$
   b. persamaan $f(x_{i+1})\times x_* < 0$ dipenuhi, $\Rightarrow$ $f(x_i) = x_*$
7. Setelah dihitung nilai $f(x_x)$, hitung pendekatan baru akar persamaan dari fungsi tersebut dengan menggunakan persamaan (3) dari prosedur perhitungan no. 4.
8. Jika nilai pendekatan yang baru belum cukup teliti maka lakukan lagi prosedur perhitungan no. 4 dengan menggunakan persamaan (3). Apabila nilai pendekatan baru yang didapat sudah cukup teliti atau nilai dari persamaan polinomial atau fungsi $f(x) \approx 0$, maka hitungan selesai dan x_* merupakan akar persamaan yang dicari.

2.4. Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson ini paling banyak digunakan dalam mencari akar-akar dari suatu persamaan. Metode ini dapat menghitung nilai pendekatan akar-akar persamaan polinomial lebih cepat dan akurat dibandingkan dengan beberapa metode yang sudah dibahas terdahulu. Penurunan rumus untuk metode ini dapat dijelaskan sebagai berikut (lihat Gambar 3),



Gambar 3. Prosedur perhitungan metode Newton-Raphson

Tentukan nilai awal x_i dan kemudian hitung $f(x_i)$.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x) = \tan\theta$$

$$f'(x_i) = \tan\theta_i = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

Dari persamaan di atas dapat diturunkan,

$$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - x_{i+1}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Metode Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

2.5. Metode Secant

Dengan metode Newton-Raphson kita dapat menghitung nilai pendekatan dari akar-akar persamaan polinomial dalam waktu yang relatif lebih cepat dan akurat dibandingkan dengan metode yang sebelumnya. Akan tetapi kelemahan dari metode ini adalah, tidak semua persamaan polinomial kompleks dapat dicari $f'(x)$ atau turunan pertamanya dengan mudah atau turunan pertamanya sangat sulit didapatkan. Sehingga turunan pertama dari fungsi $f(x)$ dapat didekati dengan persamaan pendekatan beda hingga sebagai berikut(lihat Gambar 4.),

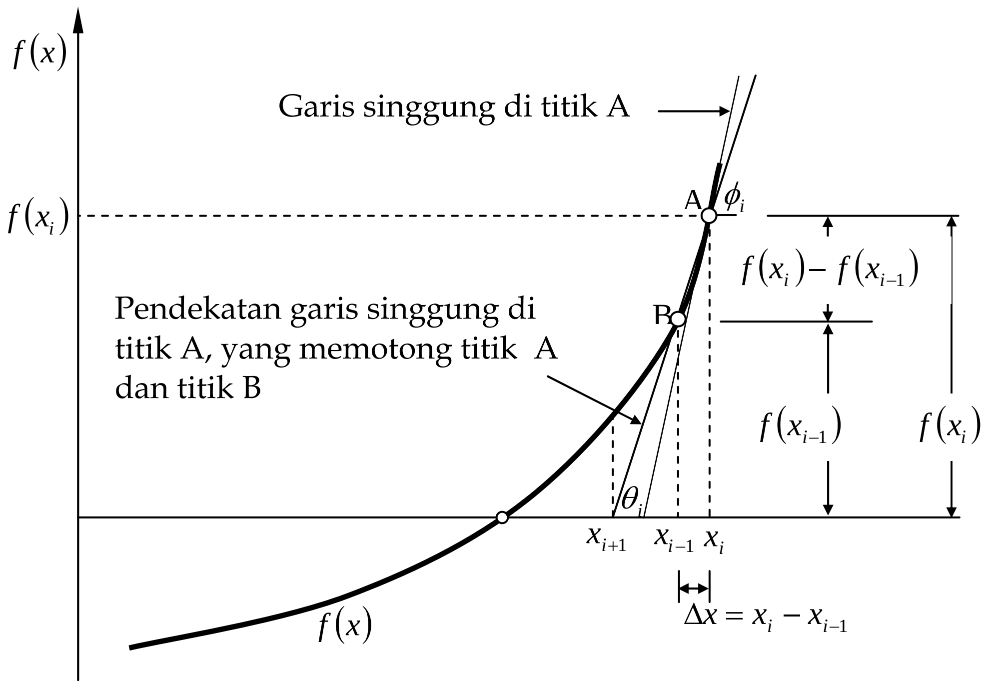
$$f'(x_i) = \tan\phi_i \approx \tan\theta_i$$

$$f'(x) \approx \tan\theta_i = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$$

dimana:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Untuk setiap prosedur perhitungan atau iterasi diperlukan pendekatan untuk turunan fungsi $f'(x)$. Semakin kecil nilai Δx yang diambil maka hasil nilai pendekatan akar-akar persamaan polinomial yang didapat akan semakin teliti dan jumlah prosedur perhitungan atau iterasi akan semakin pendek.



Gambar 4. Prosedur perhitungan metode Secant