

Bab 4

ANALISIS REGRESI dan INTERPOLASI

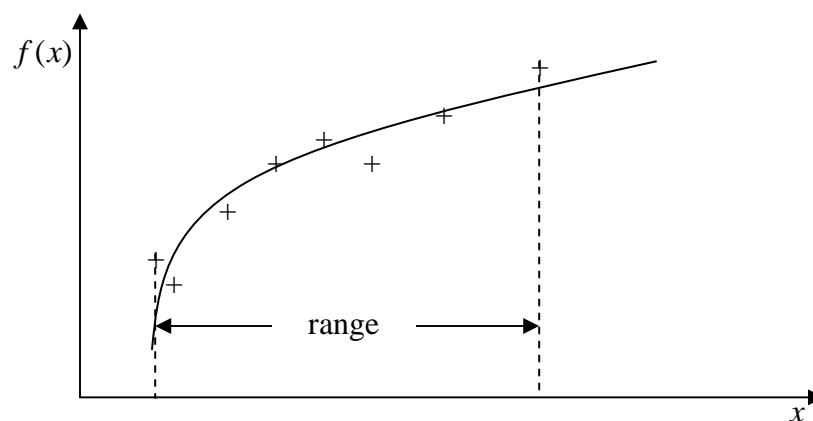
4.1. Pendahuluan

Pada kuliah ini akan dipelajari beberapa metode untuk memprediksi dan mengestimasi data diskret. Dari suatu penelitian sering dilakukan pengolahan data untuk mengetahui pola data atau bentuk kurva yang dianggap dapat mewakili data diskret yang ada.

Metode yang biasa dilakukan untuk melakukan pendekatan tersebut adalah sebagai berikut,

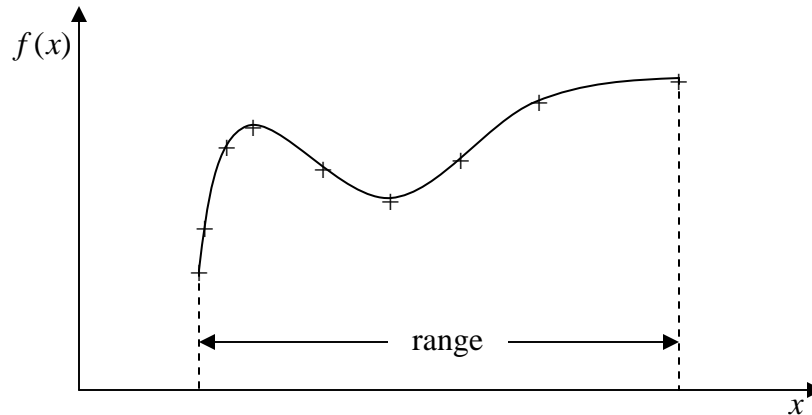
A. Metode Regresi Kuadrat Terkecil

Dengan menggunakan metode regresi kuadrat terkecil, kurva yang terbentuk dianggap mewakili titik data yang diplot, dan tidak harus melalui titik-titik data. Persamaan kurva tersebut dapat dipergunakan untuk memprediksi variabel terikat $f(x)$ untuk nilai variabel bebas x diluar range. Contohnya adalah seperti gambar berikut,



B. Metode Iterpolasi

Dengan menggunakan metode Iterpolasi, kurva yang terbentuk menghubungkan titik-titik data yang diplot. Persamaan kurva tersebut hanya dapat dipergunakan untuk mengestimasi variabel terikat $f(x)$ untuk nilai variabel bebas x didalam range. Contohnya adalah seperti gambar berikut,



A.1 Linierisasi untuk kurva tidak linier

Bentuk yang paling sederhana dari regresi kuadrat terkecil adalah kurva linier atau kurva yang berbentuk garis lurus. Persamaan garis linier dapat ditulis sebagai berikut,

$$f(x) = b \cdot x + a \quad (4.1)$$

Fungsi Exponensial dan persamaan berpangkat pun dapat dianggap sebagai kurva linier atau garis lurus.

Untuk fungsi exponensial lihat persamaan berikut,

$$y = a \cdot e^{b \cdot x} \quad (4.2)$$

Persamaan (4.2) dapat ditulis menjadi,

$$\ln y = \ln a + b.x.\ln e \quad (4.3)$$

Selanjutnya persamaan (4.3) dapat ditulis sebagai berikut,

$$y' = b.x + a' \quad (4.4)$$

Persamaan (4.4) serupa dengan persamaan (4.1), dan ini juga merupakan persamaan garis lurus atau kurva linier.

Untuk persamaan fungsi berpangkat dapat dicontohkan seperti persamaan berikut,

$$y = a.x^b \quad (4.5)$$

Persamaan (4.5) dapat ditulis seperti persamaan,

$$\log y = b.\log x + \log a \quad (4.6)$$

Selanjutnya persamaan (4.6) dapat ditulis menjadi,

$$y' = b.x' + a' \quad (4.7)$$

Persamaan (4.7) pun sebenarnya serupa dengan persamaan (4.1), yang merupakan persamaan garis lurus.

A.2. Analisis Regresi Polinomial

Persamaan Polinomial dengan orde atau derajat n dapat ditulis sebagai berikut,

$$\hat{y} = a_o + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n \quad (4.8)$$

Bila y merupakan data hasil pengukuran dan \hat{y} merupakan model persamaan polinomialnya maka kesalahan antara data dan model dapat digambarkan sebagai jumlah kuadrat dari selisih antara y dan \hat{y} untuk setiap variabel x . Jumlah kuadrat dari kesalahan tersebut dapat ditulis seperti persamaan berikut,

$$E^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (4.9)$$

$$E^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i - a_o - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2 - a_3 \cdot x_i^3 - \dots - a_{n-1} \cdot x_i^{n-1} - a_n \cdot x_i^n \right)^2 \quad (4.10)$$

Jumlah Kuadrat kesalahan atau E^2 akan minimum hanya bila dipenuhi persamaan sebagai berikut,

$$\frac{\partial E^2}{\partial a_o} = \frac{\partial E^2}{\partial a_1} = \frac{\partial E^2}{\partial a_2} = \frac{\partial E^2}{\partial a_3} = \dots = \frac{\partial E^2}{\partial a_{n-1}} = \frac{\partial E^2}{\partial a_n} = 0 \quad (4.11)$$

Dimana turunan E^2 terhadap masing-masing konstanta dapat dilihat seperti berikut,

$$\frac{\partial E^2}{\partial a_o} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i - a_o - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2 - a_3 \cdot x_i^3 - \dots - a_{n-1} \cdot x_i^{n-1} - a_n \cdot x_i^n \right) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial a_1} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} x_i \cdot \left(y_i - a_o - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2 - a_3 \cdot x_i^3 - \dots - a_{n-1} \cdot x_i^{n-1} - a_n \cdot x_i^n \right) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial a_2} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \cdot (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2 - a_3 \cdot x_i^3 - \dots - a_{n-1} \cdot x_i^{n-1} - a_n \cdot x_i^n) \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial a_3} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} x_i^3 \cdot (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2 - a_3 \cdot x_i^3 - \dots - a_{n-1} \cdot x_i^{n-1} - a_n \cdot x_i^n) \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial a_{n-1}} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} x_i^{n-1} \cdot (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2 - a_3 \cdot x_i^3 - \dots - a_{n-1} \cdot x_i^{n-1} - a_n \cdot x_i^n) \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial a_n} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} x_i^n \cdot (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2 - a_3 \cdot x_i^3 - \dots - a_{n-1} \cdot x_i^{n-1} - a_n \cdot x_i^n) \quad (4.17)$$

Bila persamaan di atas disusun, maka didapat satu sistem persamaan sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{n-1} & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \dots & \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \dots & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 & \dots & \sum x_i^{n+2} & \sum x_i^{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_i^{n-1} & \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \dots & \sum x_i^{n+n-2} & \sum x_i^{n+n-1} \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \sum x_i^{n+3} & \dots & \sum x_i^{n+n-1} & \sum x_i^{n+n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i \cdot y_i \\ \sum x_i^2 \cdot y_i \\ \sum x_i^3 \cdot y_i \\ \dots \\ \sum x_i^{n-1} \cdot y_i \\ \sum x_i^n \cdot y_i \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Untuk mendapatkan koefisien $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$, dan a_n persamaan di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan metode yang biasa dipergunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier.

Untuk mengetahui derajat kedekatan antara data dengan model dari persamaan polinomial, dapat dihitung dengan menghitung koefisien korelasi berikut,

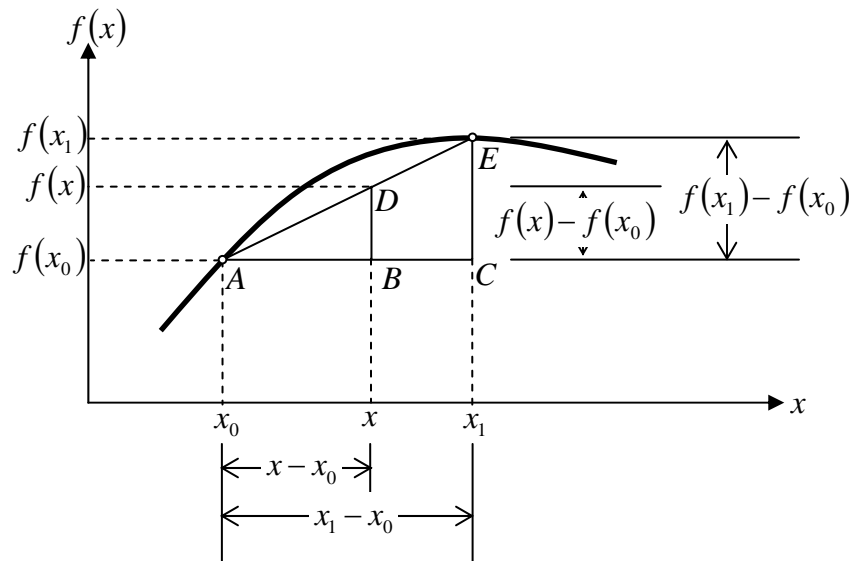
$$\text{Koefisien Korelasi} = R = \sqrt{\frac{D^2 - E^2}{D^2}} \quad (4.19)$$

$$\text{Dimana: } D^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \bar{y})^2 \quad (4.20)$$

$$E^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (4.21)$$

B.1. Interpolasi Linier

Bentuk paling sederhana dari interpolasi adalah menghubungkan dua buah titik data seperti gambar berikut,



Karena segitiga ABD dan ACE adalah sebangun maka didapat,

$$\begin{aligned} \frac{BD}{AB} &= \frac{CE}{AC} \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \\ f(x) &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Persamaan (4.22) merupakan persamaan interpolasi linier.

B.2. Interpolasi Polinomial

Bentuk umum persamaan polinomial derajat n adalah sebagai berikut,

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + b_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad (4.23)$$

Dengan memasukkan nilai $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ dan mensubstitusikan untuk setiap persamaan maka didapat konstanta $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$.

Untuk mendapatkan persamaan polinomial orde n dibutuhkan $n+1$ titik data,

sehingga solusi dari konstanta ini dapat disusun seperti,

$$b_0 = f(x_0) \quad (4.24)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] \quad (4.25)$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] \quad (4.26)$$

$$b_3 = f[x_3, x_2, x_1, x_0] \quad (4.27)$$

...

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_3, x_2, x_1, x_0] \quad (4.28)$$

Cara yang paling mudah untuk mendapatkan konstanta tersebut di atas adalah dengan menggunakan metode beda hingga seperti berikut,

$$b_1 = f[x_j, x_i] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \quad (4.29)$$

$$b_2 = f[x_k, x_j, x_i] = \frac{f[x_k, x_j] - f[x_j, x_i]}{x_k - x_i} \quad (4.30)$$

$$b_3 = f[x_l, x_k, x_j, x_i] = \frac{f[x_l, x_k, x_j] - f[x_k, x_j, x_i]}{x_l - x_i} \quad (4.31)$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_3, x_2, x_1] - f[x_{n-1}, \dots, x_3, x_2, x_1, x_0]}{x_n - x_0} \quad (4.32)$$

Bila persamaan (4.23) disusun kembali maka akan didapat persamaan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} f_n(x) = & f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & + f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_3, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Persamaan (4.33) merupakan persamaan interpolasi poliomial orde n .