

9

INTEGRAL GARIS, PERMUKAAN DAN TEOREMA INTEGRAL

INTEGRAL LIPAT DUA

Misalkan $F(x, y)$ didefinisikan pada suatu daerah tertutup R di bidang xy (lihat Gambar 9-1). Bagilah R dalam n daerah bagian ΔR_k yang masing-masing luasnya ΔA_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Misalkan (ξ_k, η_k) adalah suatu titik pada ΔR_k . Bentuklah jumlah

$$\sum_{k=1}^n F(\xi_k, \eta_k) \Delta A_k \quad \dots\dots\dots(9-1)$$

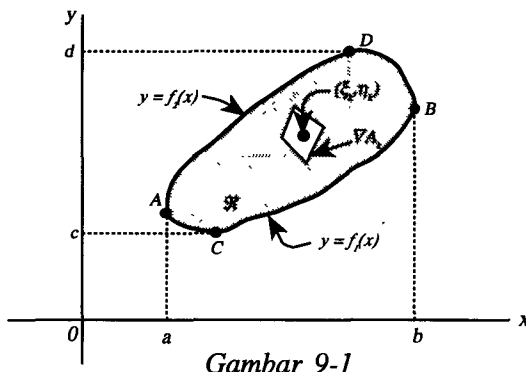
Perhatikanlah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(\xi_k, \eta_k) \Delta A_k \quad \dots\dots\dots(9-2)$$

di mana limit ini diambil agar banyaknya daerah bagian n membesar tanpa batas sehingga dimensi linier terbesar dari setiap ΔR_k mendekati nol. Jika limit ini ada, dinyatakan dengan

$$\int \int_R F(x, y) \, dA \quad \dots\dots\dots(9-3)$$

dan dinamakan integral lipat dua (integral ganda/double integral) dari $F(x, y)$ pada daerah R .



Gambar 9-1

Dapat dibuktikan bahwa limit ini ada jika $F(x, y)$ kontinu (atau kontinu bagian demi bagian) pada R .

INTEGRAL BERULANG (ITERASI/ITERATED)

Jika R suatu daerah sehingga sembarang garis sejajar sumbu y memotong batas R di paling banyak dua titik (seperti terlihat pada Gambar 9-1), maka kita dapat menuliskan persamaan kurva ACB dan ADB yang membatasi R masing-masing sebagai $y = f_1(x)$ dan $y = f_2(x)$ di mana $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ fungsi bernilai tunggal dan kontinu pada $a \leq x \leq b$. Dalam kasus ini dapat dihitung integral lipat dua (3) dengan memilih daerah ΔR_k sebagai persegi panjang yang dibentuk oleh jaring berupa garis-garis sejajar sumbu x dan y , dan ΔA_k yang menyatakan luas daerah ini. Maka (3) dapat ditulis sebagai

$$\int_R \int F(x, y) \, dx \, dy = \int_{x=a}^b \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) \, dy \, dx \quad \dots\dots\dots(9-4)$$

$$= \int_{x=a}^b \left\{ \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) \, dy \right\} dx$$

di mana integral dalam kurung dihitung pertama (dengan menganggap x tetap) dan akhirnya integral terhadap x dari a ke b . Hasil (4) ini menunjukkan bagaimana suatu integral lipat dua dapat dihitung dengan menyatakannya sebagai dua integral tunggal, dan dinamakan integral berulang.

Jika R suatu daerah sehingga suatu garis sejajar sumbu x memotong batas R pada paling banyak dua titik (seperti terlihat pada Gambar 9-1), maka persamaan kurva CAD dan CBD dapat ditulis masing-masing sebagai $x = g_1(y)$ dan $x = g_2(y)$ dan dengan cara serupa kita memperoleh

$$\int_R \int F(x, y) dx dy = \int_{y=c}^d \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y) dx dy \quad \dots\dots\dots(9-5)$$

$$= \int_{y=c}^d \left\{ \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y) dx \right\} dy$$

Jika integral lipat dua ini ada, maka (4) dan (5) secara umum akan memberikan hasil yang sama. Dalam menuliskan suatu integral lipat dua, kita dapat memilih salah satu dari bentuk (4) atau (5), dan bilamana mungkin keduanya, dan dinamakan bentuk satu dapat diubah urutan pengintegralannya terhadap bentuk lainnya.

Dalam kasus R tidak terbentuk jenis yang ditunjukkan pada gambar di atas, r secara umum dapat dibagi menjadi daerah-daerah R_1, R_2, \dots yang berbentuk jenis ini. Kemudian integral lipat dua pada daerah r dapat ditentukan dengan mengambil jumlah integral lipat duanya pada daerah R_1, R_2, \dots

INTEGRAL LIPAT TIGA

Hasil di atas dapat dengan mudah diperumun (dirampatkan) untuk daerah tiga dimensi. Sebagai contoh, perhatikanlah suatu fungsi $F(x, y, z)$ yang didefinisikan dalam suatu daerah tertutup R di ruang dimensi tiga. Bagilah daerah ini ke dalam n daerah bagian dengan volume $\Delta V_k, k = 1, 2, \dots, n$. Misalkan (ξ_k, η_k, ζ_k) adalah suatu titik dalam setiap daerah bagian, kita bentuk

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k \quad \dots\dots\dots(9-6)$$

di mana bilangan n dari pembagian ini menuju tak berhingga dimensi linier terbesar dari setiap daerah bagiannya menuju nol. Jika limit ini ada, maka dinyatakan dengan

$$\int \int \int_R F(x, y, z) dV \quad \dots\dots\dots(9-7)$$

dan dinamakan integral lipat tiga (triple integral) dari $F(x, y, z)$ pada daerah R. Limit ini ada jika $F(x, y, z)$ kontinu (kontinu bagian demi bagian) pada R.

Jika kita membangun suatu jaring yang terdiri dari bidang-bidang sejajar xy, yz dan xz, maka daerah R terbagi menjadi daerah bagian yang berbentuk balok. Dalam kasus ini kita dapat menyatakan integral lipat tiga pada daerah R yang diberikan oleh (7) dalam bentuk integral berulang

$$\int_{x=0}^b \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z) dz dy dx = \int_{x=0}^b \left[\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} \left\{ \int_{x=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z) dz \right\} dy \right] dx \dots\dots\dots(9-8)$$

(di mana integral yang paling dalam dihitung pertama). Integral ini dapat diubah urutannya dan memberikan hasil sama.

Perluasan ke dimensi yang lebih tinggi dapat juga dikerjakan.

TRANSFORMASI PADA INTEGRAL LIPAT

Dalam menghitung suatu integral lipat pada suatu daerah R seringkali dipergunakan koordinat lain, selain koordinat tegak lurus; seperti misalnya koordinat kurvilinier pada Bab 3.

Jika kita misalkan (u, v) adalah koordinat kurvilinier suatu titik pada bidang, maka akan ada suatu himpunan transformasi dengan persamaan $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ yang memetakan titik (x, y) pada bidang xy ke titik (u, v) pada bidang uv. Dalam kasus ini daerah R pada bidang xy dipetakan ke daerah R' pada bidang uv. Kemudian diperoleh

$$\iint_R F(x, y) dx dy = \iint_{R'} G(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \dots\dots\dots(9-9)$$

di mana $G(u, v) \equiv F\{f(u, v), g(u, v)\}$ dan

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \dots\dots\dots(9-10)$$

adalah Jacobian dari x dan y terhadap u dan v (lihat Bab 3).

Dengan cara yang sama jika (u, v, w) adalah koordinat kurvilinier dalam tiga dimensi, akan ada himpunan transformasi dengan persamaan $x = f(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$ dan kita dapat menuliskan

$$\iiint_R F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{R'} G(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \dots\dots(9-11)$$

di mana $G(u, v, w) \equiv F\{f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)\}$ dan

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \dots\dots\dots(9-12)$$

adalah Jacobian dari x, y dan z terhadap u, v dan w.

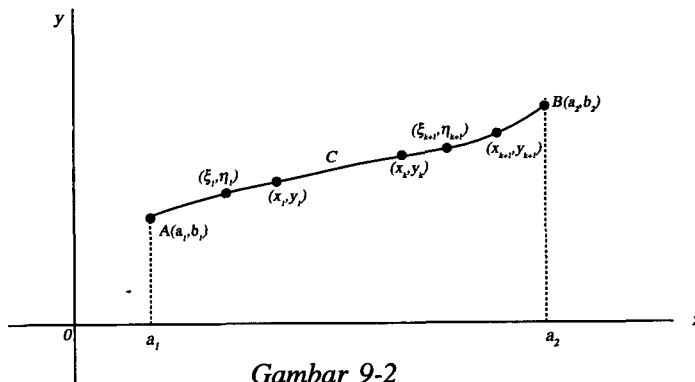
Hasil (9) dan (11) ini berkaitan dengan pergantian peubah untuk integral lipat dua dan tiga.

Perumusan ke dimensi yang lebih tinggi dapat dikerjakan dengan mudah.

9.1 INTEGRAL GARIS

Misalkan C adalah suatu kurva pada bidang xy yang menghubungkan titik A(a₁, b₁) dan B(a₂, b₂) (lihat Gambar 6-2). Misalkan P(x, y) dan Q(x, y) adalah fungsi bernilai tunggal yang didefinisikan pada setiap titik pada C. Bagilah C menjadi n bagian dengan memilih (n - 1) titik padanya, yaitu (x₁, y₁), (x₂, y₂), . . . , (x_{n-1}, y_{n-1}). Namakan Δx_k = x_k - x_{k-1} dan Δy_k = y_k - y_{k-1}, (a₂, b₂) ≡ (x_n, y_n) dan andaikan bahwa titik (ξ_k, η_k) dipilih sehingga terletak pada C di antara titik-titik (x_{k-1}, y_{k-1}) dan (x_k, y_k). Jumlahkanlah :

$$\sum_{k=1}^n \{P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k\} \dots\dots\dots(9-13)$$



Gambar 9-2

Limit jumlah ini untuk n → ∞ dengan cara membuat semua besaran Δx_k, Δy_k mendekati nol. Jika limit ini ada, dinamakan suatu integral garis sepanjang c dan dinyatakan dengan

$$\int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \text{ atau } \int_{(a_1, b_1)}^{(a_2, b_2)} [P dx + Q dy] \dots\dots\dots(9-14)$$

Limit ini ada jika P dan Q kontinu (atau kontinu bagian demi bagian) di semua titik dari C. Nilai integralnya secara umum bergantung pada P, Q, nilai khusus C dan pada limit (a_1, b_1) dan (a_2, b_2) .

Dengan cara yang persis sama kita mendefinisikan suatu integral garis sepanjang suatu kurva C dalam tiga dimensi sebagai

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \{A_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta x_k + A_2(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta y_k + A_3(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta z_k\} \dots\dots(9-15) \\ = \int_C [A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz] \end{aligned}$$

di mana A_1, A_2 dan A_3 adalah fungsi dari x, y dan z .

Jenis lain dari integral garis bergantung pada kurva khusus yang dapat didefinisikan. Sebagai contoh, jika Δs_k menyatakan panjang kurva C pada gambar di atas, yang terletak di antara titik-titik (x_k, y_k) dan (x_{k+1}, y_{k+1}) , maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n U(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k = \int_C U(x, y) ds \dots\dots\dots(9-16)$$

dinamakan integral garis dari $U(x, y)$ sepanjang kurva C. Perluasan untuk dimensi tiga (atau lebih tinggi) mungkin dikerjakan.

9.2 NOTASI VEKTOR UNTUK INTEGRAL GARIS

Menyatakan suatu integral garis dalam bentuk vektor seringkali sangat membantu dalam memahami masalah fisika dan ilmu ukur, dan juga untuk menyingkat penulisan. Sebagai contoh, jika dapat menyatakan integral garis (15) dalam bentuk

$$\begin{aligned} \int_C [A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz] &= \int_C (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \cdot (dx i + dy j + dz k) \dots(9-17) \\ &= \int_C \bar{A} \cdot d\bar{r} \end{aligned}$$

di mana $\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$ dan $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$. Integral garis (14) adalah suatu kasus khusus dari sini dengan $z = 0$.

Jika di setiap titik (x, y, z) kita hubungkan dengan suatu gaya F yang bekerja pada suatu obyek (yaitu jika suatu medan gaya didefinisikan), maka

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \dots\dots\dots(9-18)$$

secara fisis dinyatakan bahwa gaya total yang bekerja untuk menggerakkan obyek tersebut sepanjang kurva C .

9.3 MENGHITUNG INTEGRAL GARIS

Jika persamaan suatu kurva C di bidang $z = 0$ diberikan oleh $y = f(x)$, maka integral garis (14) dihitung dengan mengganti $y = f(x)$, $dy = f'(x) dx$ pada fungsi yang diintegrasikan untuk memperoleh integral tertentu.

$$\int_{a_1}^{a_2} [P\{x, f(x)\} dx + Q\{x, f(x)\} f'(x) dx] \quad \dots\dots\dots(9-19)$$

yang kemudian dapat dihitung dengan cara biasa.

Dengan cara yang sama, jika c diberikan oleh persamaan $x = g(y)$, maka $dx = g'(y) dy$ dan integral garisnya menjadi

$$\int_{b_1}^{b_2} [P\{g(y), y\} g'(y) dy + Q\{g(y), y\} dy] \quad \dots\dots\dots(9-20)$$

Jika C diberikan dalam persamaan parameter berbentuk $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, maka integral garisnya menjadi

$$\int_{t_1}^{t_2} [P\{\phi(t), \psi(t)\} \phi'(t) dt + Q\{\phi(t), \psi(t)\} \psi'(t) dt] \quad \dots\dots\dots(9-21)$$

di mana t_1 dan t_2 masing-masing menyatakan nilai t yang bersesuaian dengan titik A dan B .

Kombinasi dari metode di atas mungkin digunakan dalam perhitungan.

Cara yang sama digunakan untuk menghitung integral garis sepanjang kurva ruang.

9.4 SIFAT-SIFAT INTEGRAL GARIS

Integral garis mempunyai sifat yang sama dengan sifat integral biasa. Sebagai contoh :

$$1. \int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy$$

$$2. \int_{(a_1, b_1)}^{(a_2, b_2)} [P dx + Q dy] = - \int_{(a_2, b_2)}^{(a_1, b_1)} [P dx + Q dy]$$

jadi perubahan arah lintasan pengintegralan mengubah tanda integral garisnya.

$$3. \int_{(a_1, b_1)}^{(a_2, b_2)} [P dx + Q dy] = \int_{(a_1, b_1)}^{(a_3, b_3)} [P dx + Q dy] + \int_{(a_3, b_3)}^{(a_2, b_2)} [P dx + Q dy]$$

di mana (a_3, b_3) adalah titik lain pada C.

Sifat yang sama berlaku juga untuk integral garis dalam ruang.

9.5 KURVA TERTUTUP SEDERHANA, DAERAH TERHUBUNG SEDERHANA DAN BERGANDA

Suatu kurva tertutup sederhana adalah suatu kurva yang tidak saling beririsan. Secara matematis, suatu kurva di bidang xy didefinisikan dengan persamaan parameter $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ di mana ϕ dan ψ adalah fungsi bernilai tunggal dan kontinu pada suatu selang $t_1 \leq t \leq t_2$. Jika $\phi(u) = \phi(v)$ dan $\psi(u) = \psi(v)$ kurva itu dikatakan tertutup. Jika $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ dan $\psi(t_1) = \psi(t_2)$, hanya bila $u = v$ (kecuali dalam kasus khusus $u = t_1$ dan $v = t_2$), maka kurva tersebut tertutup dan tidak saling beririsan dengan dirinya sendiri sehingga merupakan suatu kurva tertutup sederhana. Bilamana tidak dikatakan lain, jika akan mengandaikan bahwa ϕ dan ψ mempunyai turunan bagian demi bagian pada $t_1 \leq t \leq t_2$.

Jika suatu daerah pada bidang mempunyai sifat bahwa suatu kurva tertutup yang terletak padanya dapat menyusut secara kontinu tanpa meninggalkan daerah tersebut, maka daerah itu dinamakan terhubung sederhana; dalam hal lain dinamakan terhubung berganda. [lihat soal 19].

Jika parameter t bergerak dari t_1 ke t_2 , maka kurva bidang ditentukan juga oleh arahnya. Untuk kurva di bidang xy , ditentukan arah di sebarang, yaitu positif atau negatif sesuai dengan seseorang yang menjalani kurva ini dengan kepalanya mengarah ke sumbu z positif menghasilkan daerah yang dikelilingi kurva tersebut berturut-turut ke arah kiri atau kanan. Jika kita lihat suatu kurva tertutup sederhana pada bidang xy adalah suatu kurva yang dijalani berlawanan dengan arah jarum, jam untuk arah positif dan searah putaran jarum jam untuk arah negatif.

TEOREMA GREEN PADA BIDANG

Misalkan P , Q , $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ bernilai tunggal dan kontinu pada suatu daerah tertutup sederhana R yang dibatasi oleh suatu kurva tertutup sederhana. Maka

$$\oint_C [P dx + Q dy] = \int_R \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \dots\dots\dots(9-22)$$

di mana \oint_C digunakan untuk menekankan bahwa C tertutup dengan arah positif.

Teorema ini juga benar untuk daerah yang dibatasi oleh dua atau lebih kurva tertutup (yaitu daerah terhutang berganda). Lihat Soal 19.

9.6 SYARAT UNTUK INTEGRAL GARIS UNTUK TIDAK BERGANTUNG PADA LINTASAN

Teorema 6-1. Syarat perlu dan cukup untuk $\int_C [P dx + Q dy]$ tidak bergantung pada lintasan C yang menghubungkan dua titik yang diberikan pada daerah R adalah

$$\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x \quad \dots\dots\dots(9-23)$$

pada R, di mana diandaikan bahwa turunan parsial ini kontinu pada R.

Syarat (23) juga merupakan syarat agar $P dx + Q dy$ menjadi persamaan differensial eksak, yaitu ada suatu fungsi $\phi(x,y)$ sehingga $P dx + Q dy = d\phi$. Dalam kasus ini jika titik akhir kurva C adalah (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) , maka nilai integral garisnya diberikan oleh

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} [P dx + Q dy] = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} d\phi = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1) \quad \dots\dots\dots(9-24)$$

Khususnya, jika (23) berlaku dan C tertutup, diperoleh $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ dan

$$\oint_C [P dx + Q dy] = 0 \quad \dots\dots\dots(9-25)$$

Untuk buktinya dan teorema-teorema yang berhubungan, lihatlah soal 22 dan 23.

Hasil pada Teorema 6-1 dapat diperluas untuk integral garis dalam ruang. Jadi kita memperoleh apa ?

Teorema 6-2. Syarat perlu dan cukup untuk $\int_C [A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz]$ tidak bergantung pada lintasan C yang menghubungkan dua titik yang diberikan pada daerah ϕ adalah pada R,

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_3}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial y} \quad \dots\dots\dots(9-26)$$

di mana diandaikan bahwa turunan parsial ini kontinu pada R.

Hasil tersebut dapat dinyatakan secara singkat dalam notasi vektor. Jika $A = A_1i + A_2j + A_3k$, maka integral garisnya dapat ditulis $\int_C A \cdot dr$ dan syarat (26) ekuivalen dengan syarat $\nabla \times A = 0$. Jika A menyatakan suatu medan gaya F yang bekerja pada suatu obyek, maka hasil tersebut ekuivalen dengan pernyataan bahwa gaya yang bekerja untuk menggerakkan suatu obyek dari satu titik ke titik lainnya tidak bergantung pada lintasan yang menghubungkan dua titik itu jika dan hanya jika $\nabla \times A = 0$. Medan gaya yang demikian seringkali dinamakan konservatif.

Syarat (26) [atau syarat yang ekuivalen $\nabla \times A = 0$] juga merupakan syarat agar $A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$ [atau $A \cdot dr$] menjadi differensial eksak, yaitu ada fungsi $\phi(x, y, z)$ sehingga $A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = d\phi$. Dalam kasus ini jika titik akhir kurva C adalah (x_1, y_1, z_1) dan (x_2, y_2, z_2) , maka nilai integral garisnya diberikan oleh

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} A \cdot dr = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} d\phi = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1) \dots\dots\dots(9-27)$$

Khususnya, jika C tertutup dan $\nabla \times A = 0$, kita memperoleh

$$\oint_C A \cdot dr = 0 \dots\dots\dots(9-28)$$

9.7 INTEGRAL PERMUKAAN

Misalkan S adalah suatu permukaan dua-sisi yang mempunyai proyeksi R pada bidang xy seperti terlihat pada Gambar 6-3. Andaikan bahwa suatu persamaan untuk s adalah $z = f(x, y)$, di mana f adalah fungsi bernilai tunggal dan kontinu untuk semua x dan y di R . Bagilah R menjadi n daerah bagian dengan luas ΔA_p , $p = 1, 2, \dots, n$ dan buatlah suatu kolom vertikal pada setiap daerah bagian ini dan memotong S dengan luas ΔS_p .

Misalkan $\phi(x, y, z)$ adalah fungsi bernilai tunggal dan kontinu di semua titik pada s . Bentuklah jumlah

$$\sum_{p=1}^n \phi(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta S_p \dots\dots\dots(9-29)$$

di mana (ξ_p, η_p, ζ_p) suatu titik pada ΔS_p . Jika limit jumlah ini ada untuk $n \rightarrow \infty$ dengan cara membuat setiap $\Delta S_p \rightarrow 0$, hasil limitnya dinamakan integral permukaan dari $\phi(x, y, z)$ pada S dan dinyatakan dengan

$$\int_S \int \phi(x, y, z) dS \dots\dots\dots(9-30)$$

Karena $\Delta S_p = \text{lsec } \gamma_p | \Delta A_p$ (nilai hampiran), di mana γ_p adalah sudut antara garis normal pada S dan sumbu x positif, maka limit jumlah (29) dapat ditulis sebagai

$$\int_R \int \phi(x, y, z) \operatorname{lsec} \gamma \, dA \quad \dots\dots\dots(9-31)$$

Besaran $\operatorname{lsec} \gamma$ ditentukan oleh

$$\operatorname{lsec} \gamma = \frac{1}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \quad \dots\dots\dots(9-32)$$

Kemudian, andaikan bahwa $z = f(x, y)$ mempunyai turunan yang kontinu (atau kontinu bagian demi bagian) pada R , maka (31) dapat ditulis sebagai

$$\int_R \int \phi(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy \quad \dots\dots\dots(9-33)$$

Dalam kasus persamaan untuk S diberikan dalam bentuk $F(x, y, z) = 0$, (33) dapat ditulis sebagai

$$\int_S \int \phi(x, y, z) \frac{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}}{|F_z|} \, dx \, dy \quad \dots\dots\dots(9-34)$$

Hasil (33) atau (34) dapat digunakan untuk menghitung (30).

Di atas, kita mengandaikan bahwa S adalah suatu permukaan sehingga suatu garis sejajar sumbu z memotong sumbu S hanya di satu titik. Dalam kasus S tidak berjenis demikian, S dapat dibagi menjadi permukaan S_1, S_2, \dots yang masing-masing dari jenis ini. Kemudian, integral permukaan pada S didefinisikan sebagai jumlah integral permukaan pada S_1, S_2, \dots

Hasil tersebut dinyatakan berlaku bilamana S diproyeksikan pada daerah R pada bidang xy . Dalam beberapa kasus, lebih baik untuk memproyeksikan S ke bidang yz atau zx . Untuk beberapa kasus, (30) dapat dihitung dengan modifikasi yang tepat dari (33) dan (34).

9.8 TEOREMA DIVERGENSI

Misalkan S adalah suatu permukaan tertutup yang dibatasi suatu daerah dan volumenya V . Pilihlah normal pada permukaan yang digambarkan di sebelah luar sebagai normal positif dan andaikan bahwa α, β, γ adalah sudut antara normal ini berturut-turut dengan sumbu x, y dan z positif. Jika A_1, A_2 dan A_3 kontinu dan mempunyai turunan parsial yang kontinu pada daerah tersebut, maka

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) \, dV = \iint_S (A_1 \cos \alpha + A_2 \cos \beta + A_3 \cos \gamma) \, dS \quad \dots\dots\dots(9-35)$$

yang dapat juga ditulis sebagai

$$\int \int \int_v \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dV = \int \int_s [A_1 dy dz + A_2 dz dx + A_3 dx dy] \quad \dots\dots\dots(9-36)$$

Dalam bentuk vektor dengan $\bar{A} = A_1\bar{i} + A_2\bar{j} + A_3\bar{k}$ dan $n = \cos \alpha\bar{i} + \cos \beta\bar{j} + \cos \gamma\bar{k}$, cara penulisannya dapat disederhanakan sebagai

$$\int \int \int_v \nabla \cdot \bar{A} dV = \int \int_s \bar{A} \cdot \bar{n} dS \quad \dots\dots\dots(9-37)$$

Bila dinyatakan dengan kata-kata, teorema yang dinamakan teorema divergensi atau Teorema Green ini menyatakan bahwa integral permukaan dari komponen normal suatu vektor A pada suatu permukaan tertutup sama dengan integral dari divergensi A pada isi yang dibatasi oleh permukaan tersebut.

9.9 TEOREMA STOKES

Misalkan S suatu permukaan dua-arah terbuka yang dibatasi oleh suatu kurva tertutup C yang tidak beririsan (kurva tertutup sederhana). Perhatikanlah suatu garis normal pada S, yang berarah positif bila ia berada pada satu sisi dengan S dan negatif bila berada pada sisi lainnya dari S. Pemilihan sisi sebelah mana yang positif adalah sebarang, tetapi setelah itu untuk selanjutnya demikian. Namakan arah C positif bila seorang penyelidik berjalan pada batas S dengan kepalanya mengarah ke normal positif, maka permukaannya terletak di sisi kirinya. Jika A_1, A_2, A_3 bernilai tunggal, kontinu dan mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu pada suatu daerah ruang yang memuat S, diperoleh

$$\int_c [A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz] = \int_s \int [\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \cos \gamma] dS \quad \dots\dots\dots(9-38)$$

Dalam bentuk vektor dengan $\bar{A} = A_1\bar{i} + A_2\bar{j} + A_3\bar{k}$ dan $n = \cos \alpha\bar{i} + \cos \beta\bar{j} + \cos \gamma\bar{k}$, cara penulisannya dapat disederhanakan sebagai

$$\int_c \bar{A} \cdot d\bar{r} = \int_s (\nabla \times \bar{A}) \cdot \bar{n} dS \quad \dots\dots\dots(9-39)$$

Bila dinyatakan dengan kata-kata, teorema yang dinamakan Teorema Stokes ini menyatakan bahwa integral garis dari komponen tangensial suatu vektor \bar{A} pada kurva tertutup sederhana C sama dengan integral permukaan dari komponen normal curl \bar{A} pada suatu permukaan S yang berbatas C. Perhatikanlah bahwa untuk hal khusus $\nabla \times A = 0$ pada (39), kita memperoleh hasil (28).

9.10 SOAL-SOAL LATIHAN DAN PENYELESAIANNYA

1. Hitunglah $\int_{(0,1)}^{(1,2)} [(x^2 - y) dx + (y^2 + x) dy]$ sepanjang (a) suatu garis lurus dari (0, 1) sampai (1, 2), (b) garis lurus dari (0, 1) sampai (1, 1) dan kemudian dari (1, 1) sampai (1, 2) (c) parabola $x = t, y = t^2 + 1$.

- (a) Suatu persamaan untuk garis yang menghubungkan (0, 1) dan (1, 2) dan kemudian dari 1, 1) sampai (1, 2), (c) parabola $x = t, y = t^2 + 1$.

$$\int_{x=0}^1 [(x^2 - (x + 1)) dx + \{(x + 1)^2 + x\} dx] = \int_0^1 (2x^2 + 2x) dx = 5/3$$

- (b) Sepanjang garis lurus dari (0, 1) sampai (1, 1), $y = 1, dy = 0$ dan integral garisnya sama dengan

$$\int_{x=0}^1 [(x^2 - 1) dx + (1 + x) (0)] = \int_0^1 (x^2 - 1) dx = -2/3$$

Sepanjang garis lurus dari (1, 1) sampai (1, 2), $x = 1, dx = 0$ dan integral garisnya sama dengan

$$\int_{y=1}^2 [(1 - y)(0) + (y^2 + 1) dy] = \int_1^2 (y^2 + 1) dy = 10/3$$

Karena itu nilai yang diinginkan $= -2/3 + 10/3 = 8/3$.

- (c) Karena $t = 0$ pada (0, 1) dan $t = 1$ pada (1, 2), maka integral garisnya sama dengan

$$\int_{t=0}^1 [\{t^2 - (t^2 + 1)\} dt + \{(t^2 + 1)^2 + t\} 2t dt] = \int_0^1 (2t^5 + 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1) dt = 2$$

2. Jika $A = (3x^2 - 6yz)i + (2y + 3xz)j + (1 - 4xyz^2)k$, hitunglah $\int_C \bar{A} \cdot d\bar{r}$ dari (0, 0, 0) sampai (1, 1, 1) sepanjang lintasan C berikut :

(a) $x = t, y = t^2, z = t^3$.

(b) garis lurus dari (0, 0, 0) sampai (0, 0, 1), kemudian sampai (0, 1, 1) dan setelah itu sampai (1, 1, 1).

- (c) garis lurus yang menghubungkan (0, 0, 1) dan (1, 1, 1).

$$\begin{aligned}\int_C \bar{A} \cdot d\bar{r} &= \int_C \{(3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}\} \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_C [(3x^2 - 6yz) dx + (2y + 3xz) dy + (1 - 4xyz^2) dz]\end{aligned}$$

- (a) Jika $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, titik (0, 0, 0) dan (1, 1, 1) masing-masing dengan $t = 0$ dan $t = 1$. Maka

$$\begin{aligned}\int_C \bar{A} \cdot d\bar{r} &= \int_{t=0}^1 [\{3t^2 - 6(t^2)(t^3)\} dt + \{2t^2 + 3(t)(t^3)\} d(t^2) + \\ &\quad \{1 - 4(t)(t^2)(t^3)^2\} d(t^3)] \\ &= \int_{t=0}^1 [(3t^2 - 6t^5) dt + (4t^3 + 6t^5) dt + (3t^2 - 12t^{11}) dt] = 2\end{aligned}$$

Metode lain :

Sepanjang C, $\bar{A} = (3t^2 - 6t^5)\bar{i} + (2t^2 + 3t^4)\bar{j} + (1 - 4t^9)\bar{k}$ dan $r = xi + yj + zk = ti + t^2j + t^3k$, $d\bar{r} = (\bar{i} + 2t\bar{j} + 3t^2\bar{k}) dt$. Maka

$$\int_C \bar{A} \cdot d\bar{r} = \int_0^1 [(3t^2 - 6t^5) dt + (4t^3 + 6t^5) dt + (3t^2 - 12t^{11}) dt] = 2$$

- (b) Sepanjang garis lurus dari (0, 0, 0) sampai (0, 0, 1), $x = 0$, $y = 0$, $dx = 0$, $dy = 0$ sedangkan z berubah dari 0 sampai 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{z=0}^1 [\{3(0)^2 - 6(0)(z)\}0 + \{2(0) + 3(0)(z)\}0 + \{1 - 4(0)(0)(z^2)\} dz] = \int_{z=0}^1 dz = 1$$

Sepanjang garis lurus dari (0, 0, 1) sampai (0, 1, 1), $x = 0$, $z = 1$, $dx = 0$, $dz = 0$ sedangkan y berubah dari 0 sampai 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{y=0}^1 [\{3(0)^2 - 6(y)(1)\}0 + \{2y + 3(0)(1)\}dy + \{1 - 4(0)(y)(1)^2\}0] = \int_{y=0}^1 2y dy = 1$$

Sepanjang garis lurus dari (0, 1, 1) sampai (1, 1, 1), $y = 1$, $z = 1$, $dy = 0$, $dz = 0$ sedangkan x berubah dari 0 sampai 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{x=0}^1 \{3x^2 - 6(1)(1)\} dx + \{2(1) + 3x(1)\}0 + \{1 - 4x(1)(1)^2\}0$$

$$= \int_{x=0}^1 (3x^2 - 6) dx = -5$$

$$\text{Jadi } \int_C \bar{A} \cdot d\bar{r} = 1 + 1 - 5 = -3.$$

- (c) Garis lurus yang menghubungkan (0, 0, 0) dan (1, 1, 1) dalam bentuk persamaan parameter adalah $x = t$, $y = t$, $z = t$. Maka

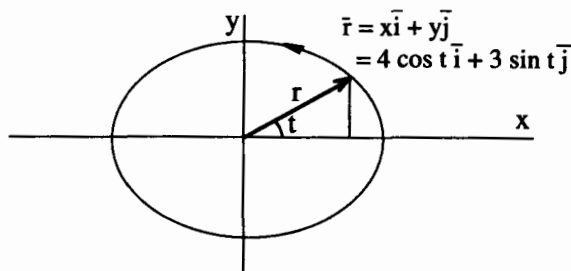
$$\int_C \bar{A} \cdot d\bar{r} = \int_{t=0}^1 [(3t^2 - 6t^2) dt + (2t + 3t^2) dt + (1 - 4t^4) dt] = 6/5$$

3. Tentukanlah besarnya usaha dalam gerakan suatu partikel yang menjalani lintasan satu putaran elips C di bidang xy , jika elips tersebut berpusat di titik awal dengan sumbu panjang 4 dan sumbu pendek 3; seperti ditunjukkan pada Gambar 9-3 dan jika medan gayanya diberikan oleh

$$\bar{F} = (3x - 4y)\bar{i} + (4x + 2y - 3z^2)\bar{j} + (2xz - 4y^2 + z^3)\bar{k}$$

Pada bidang $z = 0$, $\bar{F} = (3x - 4y)\bar{i} + (4x + 2y)\bar{j} - 4y^2\bar{k}$ dan $d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j}$ sehingga besarnya gaya yang bekerja adalah

$$\begin{aligned} \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} &= \int_C \{(3x - 4y)\bar{i} + (4x + 2y)\bar{j} - 4y^2\bar{k}\} \cdot (dx\bar{i} + dy\bar{j}) \\ &= \int_C [(3x - 4y) dx + (4x + 2y) dy] \end{aligned}$$



Gambar 9-3

Pilihlah persamaan parameter untuk elips, $x = 4 \cos t$, $y = 3 \sin t$ di mana t bergerak dari 0 sampai 2π (lihat Gambar 9-3). Maka integral garisnya sama dengan

$$\int_{t=0}^{2\pi} [\{3(4 \cos t) - 4(3 \sin t)\}\{-4 \sin t\} dt + \{4(4 \cos t) + 2(3 \sin t)\}\{3 \cos t\} dt]$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} (48 - 30 \sin t \cos t) dt = (48t - 15 \sin 2t) \Big|_0^{2\pi} = 96\pi$$

Dalam menjalani C , kita memilih arah berlawanan dengan arah jarum jam seperti ditunjukkan pada Gambar 9-3. Kita namakan ini arah positif, atau dikatakan bahwa C menjalani lintasan dengan arah positif. Jika C menjalani lintasan dalam arah jarum jam (negatif), maka nilai integralnya akan menjadi -96π .

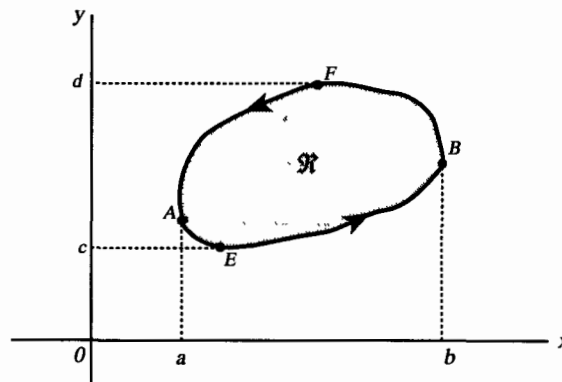
4. Hitunglah $\int_C y \, ds$ sepanjang kurva C yang ditentukan oleh $y = 2\sqrt{x}$ dari $x = 3$ sampai $x = 24$.

Karena $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + 1/x} dx$, maka kita memperoleh

$$\int_C y \, ds = \int_3^{24} 2\sqrt{x} \sqrt{1 + 1/x} dx = 2 \int_3^{24} \sqrt{x + 1} dx = \frac{4}{3} (x + 1)^{3/2} \Big|_3^{24} = 156$$

TEOREMA GREEN PADA BIDANG

5. Buktikanlah Teorema Green pada bidang jika C adalah suatu kurva tertutup yang mempunyai sifat bahwa setiap garis lurus yang sejajar sumbu koordinat memotong C paling banyak pada dua titik.



Gambar 9-4

Misalkan persamaan kurva AEB dan AFB (lihat Gambar 9-4) berturut-turut adalah $y = Y_1(x)$ dan $y = Y_2(x)$. Jika R adalah daerah yang dibatasi C, maka kita memperoleh

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_{x=a}^b \left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx \\ &= \int_{x=a}^b P(x, y) \Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} dx = \int_a^b [P(x, Y_2) - P(x, Y_1)] dx \\ &= - \int_a^b P(x, Y_1) dx - \int_b^a P(x, Y_2) dx = - \oint_C P dx \end{aligned}$$

Jadi $\oint_C P dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ (9-40)

Dengan cara yang sama, misalkan persamaan kurva EAF dan EBC berturut-turut adalah $x = X_1(y)$ dan $x = X_2(y)$. Maka

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_{y=e}^f \left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy = \int_e^f [Q(X_2, y) - Q(X_1, y)] dy \\ &= \int_f^e Q(X_1, y) dy + \int_e^f Q(X_2, y) dy = \int_C Q dy \end{aligned}$$

Jadi $\oint_C Q dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$ (9-41)

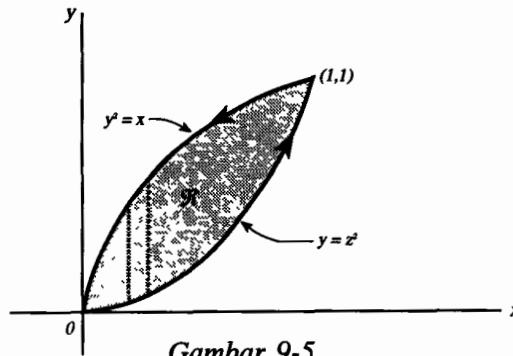
Jumlahkan (1) dan (2), $\oint_C [P dx + Q dy] = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$.

6. Periksalah Teorema Green pada bidang untuk

$$\oint_C [2xy - x^2] dx + (x + y^2) dy$$

di mana C adalah kurva tertutup dari daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y^2 = x$.

Kurva-kurva bidang tersebut berpotongan di (0, 0) dan (1, 1). Arah positif dalam menjalani C ditunjukkan pada Gambar 9-5



Sepanjang $y = x^2$, integral garisnya sama dengan

$$\int_{x=0}^1 [\{(2x)(x^2) - x^2\} dx + \{x + (x^2)^2\} d(x^2)] = \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5) dx = 7/6$$

Sepanjang $y^2 = x$, integral garisnya sama dengan

$$\int_{y=1}^0 [\{2(y^2)(y) - (y^2)^2\} d(y^2) + \{y^2 + y^2\} dy] = \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2) dy = -17/15$$

Maka integral garis yang diinginkan = $7/6 - 17/15 = 1/30$.

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_R \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y} (2xy - x^2) \right\} dx dy \\ &= \iint_R (1 - 2x) dx dy = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 (y - 2xy) \Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3) dx = 1/30 \end{aligned}$$

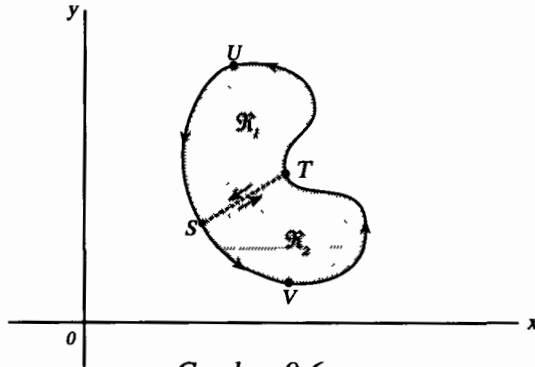
Dengan demikian selesailah pemeriksaan Teorema Green.

7. Perluaslah bukti Teorema Green pada bidang yang diberikan dalam Soal 5 ke suatu kurva C di mana garis sejajar sumbu koordinat memotong C lebih dari dua titik.

Perhatikanlah suatu kurva tertutup C seperti terlihat pada Gambar 9-6, di mana garis sejajar sumbu koordinat akan memotong C lebih dari dua titik. Dengan cara membuat garis ST, daerah tersebut terbagi menjadi dua bagian, yaitu daerah R_1 dan R_2 masing-masing merupakan jenis yang telah dibahas dalam Soal 5 di mana Teorema Green dapat digunakan, yaitu

$$(1) \int_{STUS} [P dx + Q dy] = \int_{R_1} \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$(2) \int_{SVTS} [P dx + Q dy] = \int_{R_2} \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



Gambar 9-6

Jumlahkan ruas kiri (1) dan (2), tanpa menuliskan fungsi yang diintegrasikan $P dx + Q dy$; dalam setiap kasus diperoleh :

$$\int_{STUS} + \int_{SVTS} = \int_{ST} + \int_{TUS} + \int_{SVT} + \int_{TS} = \int_{TUS} + \int_{SVT} = \int_{TUSVT}$$

dengan menggunakan kenyataan bahwa $\int_{ST} = -\int_{TS}$

Jumlahkan ruas kanan (1) dan (2), tanpa menuliskan fungsi yang diintegrasikan,

$$\int_{R_1} + \int_{R_2} = \int_R$$

di mana R terdiri dari R_1 dan R_2 .

Jadi $\int_{TUSVT} [P dx + Q dy] = \int_R \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ dan terbuktilah teorema ini.

Suatu daerah R yang diperhatikan di sini, di mana suatu kurva tertutup yang terletak dalam R dapat menyusut secara kontinu ke suatu titik tanpa meninggalkan R, dinamakan suatu daerah terhubung-sederhana. Suatu daerah yang tidak terhubung-sederhana dinamakan terhubung-berganda. Kita telah menunjukkan bahwa Teorema Green di bidang menggunakan daerah tertutup-sederhana yang dibatasi kurva tertutup. Dalam soal 6-10, teorema ini dapat diperluas untuk daerah terhubung-berganda.

Untuk daerah terhubung sederhana yang lebih rumit, kita perlu membuat lebih banyak garis seperti ST, agar teorema tersebut dapat diperlihatkan.

8. Tunjukkanlah bahwa luas daerah yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana C diberikan oleh rumus $\frac{1}{2} \oint_C [x dy - y dx]$.

Dalam Teorema Green, ambillah $P = -y$, $Q = x$. Maka

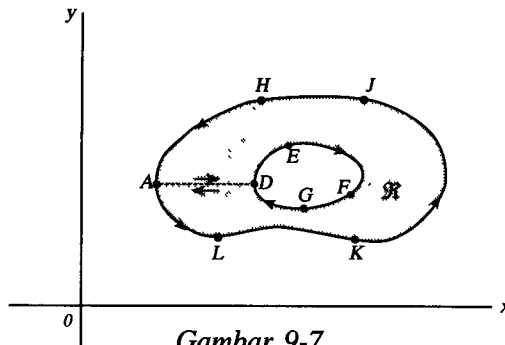
$$\oint_C [x dy - y dx] = \int_R \int \left(\frac{\partial}{\partial x} (x) - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right) dx dy = 2 \int_R \int dx dy = 2A$$

di mana A adalah luas yang diinginkan. Jadi $A = \frac{1}{2} \oint_C [x dy - y dx]$.

9. Tentukanlah luas elips $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$.

$$\begin{aligned} \text{Luas} &= \frac{1}{2} \oint_C [x dy - y dx] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos \theta)(b \cos \theta) d\theta - (b \sin \theta) \\ &\quad (-a \sin \theta) d\theta] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab d\theta = \pi ab \end{aligned}$$

10. Tunjukkanlah bahwa teorema Green pada bidang juga berlaku untuk suatu daerah terhubung-berganda R seperti ditunjukkan pada Gambar 9-7.



Gambar 9-7

Daerah yang berwarna gelap R, seperti ditunjukkan pada gambar, adalah terhubung berganda karena tidak setiap kurva tertutup yang terletak pada R dapat menyusut ke suatu titik tanpa meninggalkan R; sebagai contoh misalnya kurva disekeliling DEFGD. Batas untuk R, yang terdiri dari titik-titik luar batas AHJKLA dan titik-dalam batas DEFGD dijalani dalam arah positif, sehingga seseorang yang berjalan dalam arah ini selalu melihat daerah R di sebelah kirinya. Dapat dilihat

bahwa arah positif itu ditunjukkan di tengah gambar tersebut.

Untuk menunjukkan teorema ini, buatlah garis AD, yang dinamakan sebuah potongan silang (cross-cut) dan menghubungkan batas-batas luar dan dalam. Daerah yang dibatasi oleh ADEFGDALKJHA terhubung sederhana, sehingga Teorema Green berlaku. Maka

$$\oint_{ADEFGDALKJHA} [P dx + Q dy] = \int_R \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Tetapi integral di ruas kiri, tanpa penulisan fungsinya sama dengan

$$\int_{AD} + \int_{DEFGD} + \int_{DA} + \int_{ALKJHA} = \int_{DEFGD} + \int_{ALKJHA}$$

karena $\int_{AD} = -\int_{DA}$ Jadi jika C_1 adalah kurva ALKJHA, C_2 adalah kurva DEFGD dan C adalah batas R yang terdiri dari C_1 dan C_2 (dijalani dalam arah positif), maka

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_C \text{ sehingga}$$

$$\oint_C [P dx + Q dy] = \int_R \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

KETAKBERGANTUNGAN PADA LINTASAN

11. Misalkan $P(x, y)$ dan $Q(x, y)$ kontinu dan mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu di setiap titik dari daerah terhubung sederhana R. Buktikanlah bahwa syarat perlu dan cukup agar $\oint_C [P dx + Q dy] = 0$ di sekeliling setiap lintasan tertutup pada R adalah kesamaan $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ berlaku pada R.

Syarat cukup : andaikan $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Menurut Teorema Green,

$$\oint_C [P dx + Q dy] = \int_R \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

di mana R adalah daerah yang dibatasi C.

Syarat perlu :

Andaikan $\oint_C [P dx + Q dy] = 0$ di sekeliling setiap lintasan tertutup C pada R dan $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ pada suatu titik pada R. Khususnya andaikan $\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x > 0$ pada titik (x_0, y_0) .

Menurut hipotesa $\partial P/\partial y$ dan $\partial Q/\partial x$ kontinu pada R , maka haruslah ada suatu daerah τ yang memuat (x_0, y_0) , sebagai titik-dalamnya sehingga $\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x > 0$. Jika Γ adalah batas τ , maka menurut Teorema Green,

$$\oint_{\Gamma} [P dx + Q dy] = \int_{\tau} \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy > 0$$

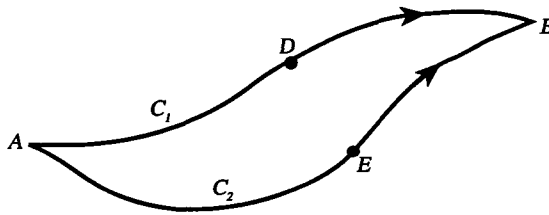
yang bertentangan dengan hipotesa bahwa $\oint [P dx + Q dy] = 0$ untuk semua kurva tertutup dalam R . Jadi $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ tidak mungkin positif.

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ tidak mungkin negatif, dan ini mengakibatkan bahwa kesamaan $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ berlaku pada r .

12. Misalkan P dan Q didefinisikan seperti dalam Soal 11. Buktikanlah bahwa syarat perlu dan cukup agar

$$\int_A^B [P dx + Q dy]$$

tidak bergantung dari lintasan dalam R yang menghubungkan titik A dan B adalah berlakunya kesamaan $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ dalam R .



Gambar 9-8

Syarat cukup. Jika $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, maka menurut Soal 11,

$$\int_{ADBEA} [P dx + Q dy] = 0$$

(lihat Gambar 9-8). Dari sini, tanpa menuliskan fungsi yang diintegrasikan $P dx + Q dy$, diperoleh

$$\int_{ADB} + \int_{BEA} = 0, \quad \int_{ADB} = -\int_{BEA} = \int_{AEB} \quad \text{dan juga} \quad \int_{C_1} = \int_{C_2}$$

yaitu integralnya tidak bergantung pada lintasannya.

13. (a) Buktikanlah bahwa $\int_{(1,2)}^{(3,4)} [6xy^2 - y^3] dx + (6x^2y - 3xy^2) dy$ tidak bergantung pada lintasan yang menghubungkan (1, 2) dan (3, 4).

(b) Hitunglah integral pada (a).

(a) $P = 6xy^2 - y^3$, $Q = 6x^2y - 3xy^2$. Maka $\partial P/\partial y = 12xy - 3y^2 = \partial Q/\partial x$ dan menurut Soal 12 integral garisnya tidak bergantung pada lintasan.

(b) **Metode 1.**

Karena integral garisnya tidak bergantung pada lintasan, pilihlah suatu lintasan yang menghubungkan (1, 2) dan (3, 4); sebagai contoh, lintasan ini terdiri dari garis yang menghubungkan (1, 2) dan (3, 2) [sepanjang ini $y = 2$, $dy = 0$] dan kemudian dari (3, 2) ke (3, 4) [sepanjang ini $x = 3$, $dx = 0$]. Maka integral yang diinginkan sama dengan

$$\int_{x=1}^3 (24x - 8) dx + \int_{y=2}^4 (54y - 9y^2) dy = 80 + 156 = 236$$

Metode 2.

Karena $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, kita mempunyai (1) $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 6xy^2 - y^3$, (2) $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2$.

Dari (1), $\phi = 3x^2y^2 - xy^3 + f(y)$. Dari (2), $\phi = 3x^2y^2 - xy^3 + g(x)$. Ini hanya mungkin bilamana kedua bentuk untuk ϕ sama, yaitu jika $f(y) = g(x) = c$, suatu konstanta. Karena itu $\phi = 3x^2y^2 - xy^3 + c$. Maka

$$\begin{aligned} \int_{(1,2)}^{(3,4)} [(6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy] &= \int_{(1,2)}^{(3,4)} d(3x^2y^2 - xy^3 + c) \\ &= 3x^2y^2 - xy^3 + c \Big|_{(1,2)}^{(3,4)} = 236 \end{aligned}$$

Perhatikanlah bahwa pada perhitungan ini konstanta sembarang c dapat dihilangkan.

Dengan pemeriksaan kita dapat juga melihat bahwa $(6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy = (6xy^2 dx + 6x^2y dy) - (y^3 dx + 3xy^2 dy) = d(3x^2y^2) - d(xy^3) = d(3x^2y^2 - xy^3)$

dan dari sini jelaslah bahwa $\phi = 3x^2y^2 - xy^3 + c$.

14. Hitunglah $\oint [(x^2y \cos x + 2xy \sin x - y^2e^x) dx + (x^2 \sin x - 2ye^x) dy]$ di sekeliling hiposikloida $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

$$P = x^2y \cos x + 2xy \sin x - y^2e^x, \quad Q = x^2 \sin x - 2ye^x.$$

Maka $\partial P/\partial y = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2ye^x = \partial Q/\partial x$, sehingga menurut Soal 11, integral garis sekeliling suatu kurva tertutup, khususnya $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, adalah nol.

INTEGRAL PERMUKAAN

15. Jika γ adalah sudut di antara garis normal pada suatu titik (x, y, z) pada permukaan dan sumbu z positif, buktikanlah bahwa

$$|\sec \gamma| = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

yang sesuai dengan persamaan untuk S yaitu $z = f(x, y)$ atau $F(x, y, z) = 0$.

Jika persamaan S adalah $F(x, y, z) = 0$, suatu normal untuk S di (x, y, z) adalah $\nabla F = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}$. Maka

$$\nabla F \cdot \bar{k} = |\nabla F| |k| \cos \gamma \quad \text{atau} \quad F_z = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \cos \gamma$$

dan dari sini $|\sec \gamma| = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|}$ seperti yang diinginkan.

Dalam kasus persamaan $z = f(x, y)$, dapat dituliskan $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$, dan dari sini $F_x = -z_x$, $F_y = -z_y$, dan $F_z = 1$ sehingga kita memperoleh $|\sec \gamma| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$.

16. Hitunglah $\int_S \int U(x, y, z) dS$ di mana S adalah permukaan paraboloida $z = 2 - (x^2 + y^2)$ di atas bidang xy dan $U(x, y, z)$ sama dengan (a) 1, (b) $x^2 + y^3$, (c) $3z$. Berikanlah suatu tafsiran fisis dalam kasus ini.

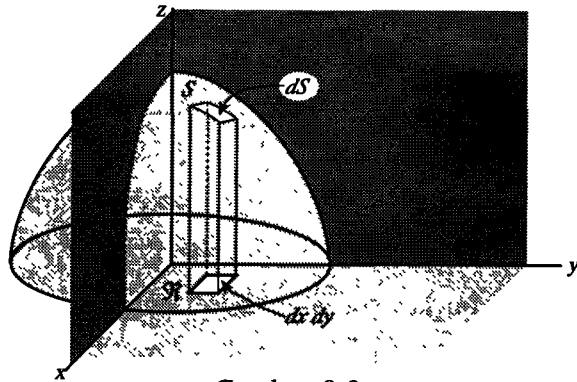
Integral yang diinginkan sama dengan

$$\int_R \int U(x, y, z) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \quad \dots \quad (1)$$

di mana R adalah proyeksi S pada bidang xy yaitu $x^2 + y^2 = 2$, $z = 0$

Karena $z_x = -2x$, $z_y = -2y$, (1) dapat ditulis sebagai

$$\int_R \int U(x, y, z) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \quad \dots \quad (2)$$



Gambar 9-9

- (a) Jika $U(x, y, z) = 1$, (2) menjadi

$$\int_R \int \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$$

Untuk menghitung ini, transformasikanlah ke dalam koordinat kutub (ρ, ϕ) . Maka integralnya menjadi

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4\rho^2} \, \rho \, d\rho \, d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{12} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \Big|_{\rho=0}^{\sqrt{2}} \, d\phi = \frac{13\pi}{3}$$

Secara fisis, ini menyatakan luas permukaan S, atau massa dari S yang diandaikan rapat massanya 1 satuan.

- (b) Jika $U(x, y, z) = x^2 + y^2$, (2) menjadi $\int_R \int (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$ atau dalam koordinat kutub

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho \, d\phi = \frac{149\pi}{30}$$

di mana pengintegralan terhadap ρ diselesaikan dengan pergantian $\sqrt{1 + 4\rho^2} = u$.

Maka secara fisis, ini menyatakan momen inersia dari S terhadap sumbu z dengan pengandaian rapat massanya 1 satuan, atau massa dari S yang diandaikan rapat massanya $= x^2 + y^2$.

- (c) Jika $U(x, y, z) = 3z$, (2) menjadi

$$\int_R \int 3z \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy = \int_R \int 3\{2 - (x^2 + y^2)\} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$$

atau dalam koordinat kutub,

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\sqrt{2}} 3\rho(2 - \rho^2) \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho \, d\phi = \frac{111\pi}{10}$$

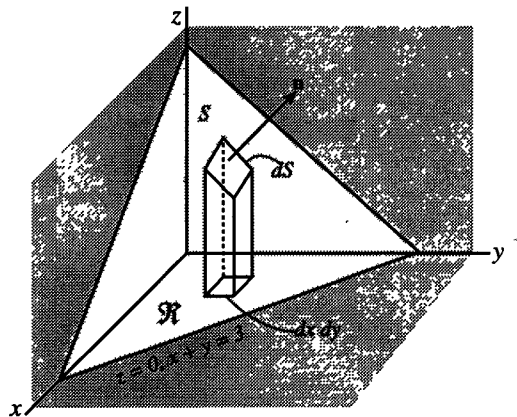
Secara fisis, ini menyatakan massa dari S yang diandaikan rapat massanya $= 3z$, atau tiga kali momen pertama dari S terhadap bidang xy .

17. Tentukanlah luas permukaan suatu setengah bola (hemisphere) berjari-jari a yang dipotong oleh suatu silinder yang garis tengahnya sama dengan jari-jari tersebut.

Persamaan untuk setengah bola dan silinder (lihat Gambar 9-20), berturut-turut diberikan oleh $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (atau $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$) dan $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$ (atau $x^2 + y^2 = ax$).

Karena

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{dan} \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$



Gambar 9-10

Kita memperoleh luas permukaan yang diinginkan

$$= 2 \int_R \int \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy = 2 \int_R \int \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy$$

Ada dua cara yang mungkin untuk menghitungnya.

Metode 1. Gunakanlah koordinat kutub.

Karena $x^2 + y^2 = ax$ dalam koordinat kutub menjadi $\rho = a \cos \phi$, integralnya menjadi

$$\begin{aligned}
2 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{a \cos \phi} \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho \, d\rho \, d\phi &= 2a \int_{\phi=0}^{\pi/2} -\sqrt{a^2 - \rho^2} \Big|_{\rho=0}^{a \cos \phi} \, d\phi \\
&= 2a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \phi) \, d\phi = (\pi - 2)a^2
\end{aligned}$$

Metode 2. Integral tersebut sama dengan

$$\begin{aligned}
2 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\sqrt{ax-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \, dy \, dx &= 2a \int_{x=0}^a \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{ax-x^2}} \Big|_{y=0}^{\sqrt{ax-x^2}} \, dx \\
&= 2a \int_0^a -1 \sqrt{\frac{x}{a+x}} \, dx
\end{aligned}$$

Misalkan $x = a \tan^2 \theta$, maka integralnya menjadi

$$\begin{aligned}
4a^2 \int_0^{\pi/4} \theta \tan \theta \sec^2 \theta \, d\theta &= 4a^2 \left\{ \frac{1}{2} \theta \tan^2 \theta \Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \tan^2 \theta \, d\theta \right\} \\
&= 2a^2 \left\{ \theta \tan^2 \theta \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\sec^2 \theta - 1) \, d\theta \right\} \\
&= 2a^2 \left\{ \pi/4 - (\tan \theta - \theta) \Big|_0^{\pi/4} \right\} = (\pi - 2)a^2
\end{aligned}$$

Perhatikanlah bahwa integral di atas tak wajar dan cara menghitungnya dikerjakan dengan proses limit yang sesuai.

18. Tentukanlah pusat dari permukaan pada Soal 16.

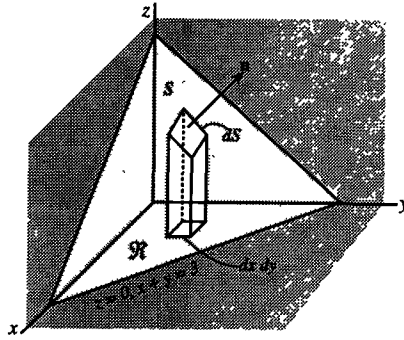
Berdasarkan sifat simetri, $x = y = 0$ dan

$$z = \frac{\int_S \int z \, dS}{\int_S \int dS} = \frac{\int_R \int z \sqrt{1 + 4x^2 + y^2} \, dx \, dy}{\int_R \int \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy}$$

Pembilang dan penyebut berturut-turut dapat diperoleh dari hasil Soal 16(c)

dan 16(a), sehingga $z = \frac{37\pi/10}{13\pi/3} = \frac{111}{130}$

19. Hitunglah $\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$, di mana $\mathbf{A} = xy\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k}$, S adalah bagian dari bidang $2x + 2y + z = 6$ yang terletak di oktan pertama dan \mathbf{n} adalah suatu normal satuan pada S .



Gambar 9-11

Suatu normal untuk S adalah $\nabla(2x + 2y + z - 6) = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, sehingga

$$\bar{n} = \frac{2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}}{3}. \text{ Maka}$$

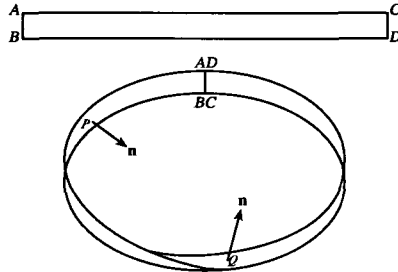
$$\begin{aligned} \bar{A} \cdot \bar{n} &= \{xy\bar{i} - x^2\bar{j} + (x+z)\bar{k}\} \cdot \left(\frac{2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}}{3}\right) \\ &= \frac{2xy - 2x^2 + (x+z)}{3} \\ &= \frac{2xy - 2x^2 + (x + 6 - 2x - 2y)}{3} \\ &= \frac{2xy - 2x^2 - x - 2y + 6}{3} \end{aligned}$$

Integral permukaan yang diinginkan adalah

$$\begin{aligned} \int_S \left(\frac{2xy - 2x^2 - x - 2y + 6}{3}\right) dS &= \int_R \left(\frac{2xy - 2x^2 - x - 2y + 6}{3}\right) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \int_R \left(\frac{2xy - 2x^2 - x - 2y + 6}{3}\right) \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} dx dy \\ &= \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{3-x} (2xy - 2x^2 - x - 2y + 6) dy dx \\ &= \int_{x=0}^3 (xy^2 - 2x^2y - xy - y^2 + 6y) \Big|_0^{3-x} dx = 27/4 \end{aligned}$$

20. Sehubungan dengan integral permukaan, kita membatasi pembicaraan kita pada permukaan dua-sisi. Berikanlah suatu contoh permukaan yang bukan dua-sisi.

Ambillah suatu pita kertas seperti ABCD pada Gambar 9-12. Pelintirlah pita itu sehingga titik A dan B masing-masing jatuh pada D dan C, seperti pada gambar. Jika n adalah normal positif di titik P pada permukaan, kita memperoleh bahwa bilamana n bergerak di sekeliling permukaan, ia akan berbalik arah pada saat sampai di P kembali. Jika kita mencoba memberi warna hanya pada satu sisi dari permukaan, kita akan memperoleh bahwa seluruhnya terwarnai. Permukaan ini, yang dinamakan Pita Moebius adalah suatu contoh dari permukaan satu sisi. Permukaan ini kadang-kadang dinamakan suatu permukaan tak terorientasi. Suatu permukaan dua sisi adalah terorientasi.

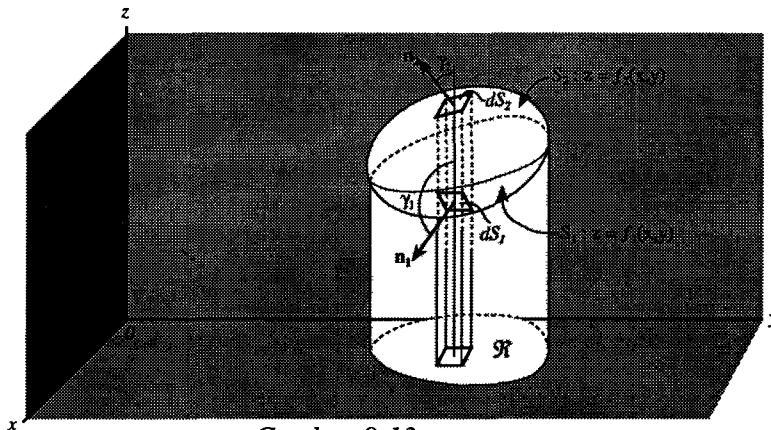


Gambar 9-12

TEOREMA DIVERGENSI

21. Buktikanlah teorema divergensi

Misalkan S adalah suatu permukaan tertutup sehingga suatu garis sejajar sumbu koordinat memotong S paling banyak pada dua titik. Andaikan bahwa permukaan bagian bawah dan atas berturut-turut adalah S_1 dan S_2 dengan persamaan $z = f_1(x, y)$ dan $z = f_2(x, y)$. Nyatakanlah proyeksi permukaan ini pada bidang xy dengan R . Perhatikanlah bentuk



Gambar 9-13

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dV &= \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dz dy dx = \int_R \int \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z} dz \right] dy dx \\ &= \iint_R A_3(x, y, z) \Big|_{z=f_1}^{f_2} dy dx = \iint_R [A_3(x, y, f_2) - A_3(x, y, f_1)] dy dx \end{aligned}$$

Untuk bagian atas S_2 , $dy dx = \cos \gamma_2 dS_2 = \vec{k} \cdot \vec{n}_2 dS_2$ karena normal \vec{n}_2 pada S_2 membuat suatu sudut lancip γ_2 dengan k .

Untuk bagian bawah S_1 , $dy dx = -\cos \gamma_1 dS_1 = -\vec{k} \cdot \vec{n}_1 dS_1$ karena normal \vec{n}_1 dan S_1 membuat suatu sudut tumpul γ_1 dengan k .

$$\begin{aligned} \text{Maka } \iint_R A_3(x, y, f_2) dy dx &= \iint_{S_2} A_3 \vec{k} \cdot \vec{n}_2 dS_2 \\ \iint_R A_3(x, y, f_1) dy dx &= - \iint_{S_1} A_3 \vec{k} \cdot \vec{n}_1 dS_1 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \iint_R A_3(x, y, f_2) dy dx - \iint_R A_3(x, y, f_1) dy dx &= \iint_{S_2} A_3 \vec{k} \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \iint_{S_1} A_3 \vec{k} \cdot \vec{n}_1 dS_1 \\ &= \iint_S A_3 \vec{k} \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

sehingga
$$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dV = \iint_S A_3 \vec{k} \cdot \vec{n} dS \quad \dots\dots\dots (1)$$

Dengan cara yang sama, proyeksikan S pada bidang koordinat lainnya,

$$\iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x} dV = \iint_S A_1 \vec{i} \cdot \vec{n} dS \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_2}{\partial y} dV = \iint_S A_2 \vec{j} \cdot \vec{n} dS \quad \dots\dots\dots (3)$$

Jumlahkan (1), (2) dan (3),

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dV = \iint_S (A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}) \cdot \vec{n} dS$$

atau
$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds$$

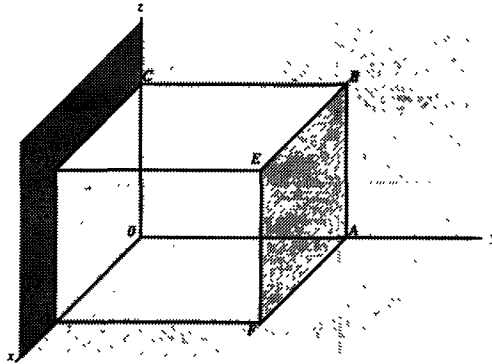
Teorema tersebut dapat diperluas untuk permukaan di mana garis yang sejajar sumbu koordinat memotongnya lebih daripada dua titik. Untuk menyelesaikan perluasan ini, bagilah daerah yang di batasi S menjadi daerah bagian di mana syarat di atas dipenuhi. Prosedur yang sama digunakan dalam Teorema Green untuk bidang.

2. Periksalah teorema divergensi untuk $\vec{A} = (2x - z)\vec{i} + x^2y\vec{j} - xz^2\vec{k}$ yang diambil pada daerah yang dibatasi oleh $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

Pertama hitunglah $\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$ di mana S adalah permukaan kubus pada Gambar 9-24.

Bidang DEFG: $\vec{n} = \vec{i}, x = 1$. Maka

$$\begin{aligned} \iint_{DEFG} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^1 \int_0^1 \{(2 - z)\vec{i} + y\vec{j} - z^2\vec{k}\} \cdot \vec{i} \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2 - z) \, dy \, dz = 3/2 \end{aligned}$$



Gambar 6-14

Bidang ABCO: $\vec{n} = -\vec{i}, x = 0$. Maka

$$\iint_{ABCO} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (-z\vec{i}) \cdot (-\vec{i}) \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 z \, dy \, dz = 1/2$$

Bidang ABEF: $\vec{n} = \vec{j}, y = 1$. Maka

$$\iint_{ABEF} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 \{(2x - z)\vec{i} + x^2\vec{j} - xz^2\vec{k}\} \cdot \vec{j} \, dx \, dz = \int_0^1 \int_0^1 x^2 \, dx \, dz = 1/3$$

Bidang OGDC: $\vec{n} = -\vec{j}$, $\vec{y} = 0$. Maka

$$\iint_{\text{OGDC}} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 \{(2x - z)\vec{i} - xz^2\vec{k}\} \cdot (-\vec{j}) \, dx \, dz = 0$$

Bidang BCDE: $\vec{n} = \vec{k}$, $z = 1$. Maka

$$\iint_{\text{BCDE}} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 \{(2x - 1)\vec{i} + x^2y\vec{j} - x\vec{k}\} \cdot \vec{k} \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 -x \, dx \, dy = -1/2$$

Bidang AFGO: $\vec{n} = -\vec{k}$, $z = 0$. Maka

$$\iint_{\text{AFGO}} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 \{2x\vec{i} - x^2y\vec{j}\} \cdot (-\vec{k}) \, dx \, dy = 0$$

Jumlahkan $\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = 3/2 + 1/2 + 1/3 + 0 - 1/2 + 0 = 11/6$. Karena

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2 + x^2 - 2xz) \, dx \, dy \, dz = \frac{11}{6}$$

sehingga teorema divergensi untuk kasus ini terbukti.

23. Hitunglah $\iint_S \vec{r} \cdot \vec{n} \, dS$, di mana S adalah suatu permukaan tertutup.

Menurut teorema divergensi,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{r} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{r} \, dV \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \, dV \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) \, dV = 3 \iiint_V dV = 3V \end{aligned}$$

di mana V adalah volume benda yang dibatasi S.

24. Hitunglah $\int_S [xz^2 \, dy \, dz + (x^2y - z^3) \, dz \, dx + (2xy + y^2z) \, dx \, dy]$ di mana S adalah seluruh permukaan setengah bola yang dibatasi oleh $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ dan $z = 0$, (a) dengan teorema divergensi (Teorema Green di ruang), (b) langsung.

(a) Karena $dy \, dz = dS \cos \alpha$, $dz \, dx = dS \cos \beta$, $dx \, dy = dS \cos \gamma$, integralnya dapat ditulis

$$\int_S \int \{xz^2 \cos \alpha + (x^2y - z^3) \cos \beta + (2xy + y^2z) \cos \gamma\} dS = \int_S \int \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

di mana $\vec{A} = xz^2\vec{i} + (x^2y - z^3)\vec{j} + (2xy + y^2z)\vec{k}$ dan $\vec{n} = (\cos \alpha)\vec{i} + (\cos \beta)\vec{j} + (\cos \gamma)\vec{k}$, normal satuan yang digambarkan dalam arah ke luar.

Kemudian, dengan teorema divergensi, integral tersebut sama dengan

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(xz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y - z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2z) \right\} dV =$$

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

di mana V adalah daerah dibatasi setengah bola dan bidang xy.

Dengan menggunakan koordinat bola, integral ini sama dengan

$$4 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^a r^2 \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{2\pi a^5}{5}$$

- (b) Jika S_1 adalah suatu permukaan cembung dari daerah setengah bola dan S_2 adalah alasnya ($z = 0$), maka

$$\iint_{S_1} xz^2 dy dz = \int_{y=-1}^a \int_{x=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} z^2 \sqrt{a^2 - y^2} - z^2 dx dy - \int_{y=-a}^a \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} -z^2 \sqrt{a^2 - y^2} - z^2 dz dy$$

$$\iint_{S_1} (x^2y - x^3) dz dx = \int_{x=-a}^a \int_{x=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \{x^2 \sqrt{a^2 - x^2} - z^2 - z^2\} dz dx$$

$$- \int_{z=-a}^a \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \{-x^2 \sqrt{a^2 - x^2} - z^2 - z^3\} dz dx$$

$$\iint_{S_1} (2xy + y^2z) dx dy = \int_{x=-a}^a \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \{2xy + y^2 \sqrt{a^2 - x^2} - y^2\} dy dx$$

$$\iint_{S_2} xz^2 dy dz = 0, \quad \iint_{S_1} (x^2y - z^3) dz dx = 0$$

$$\iint_{S_1} (2xy + y^2z) dx dy = \iint_{S_2} \{2xy + y^2(0)\} dx dy = \int_{x=-a}^a$$

$$\int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2xy dy dx = 0$$

Dengan tambahan di atas, kita memperoleh

$$4 \int_{y=0}^a \int_{x=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} z^2 \sqrt{a^2-y^2-z^2} dz dy + 4 \int_{x=0}^a \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2 \sqrt{a^2-x^2-z^2} dz dx$$

$$+ 4 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx$$

Karena berdasarkan sifat simetri semua integral ini sama, maka dengan menggunakan koordinat kutub diperoleh hasil

$$12 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx = 12 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^a \rho^2 \sin^2 \phi \sqrt{a^2-\rho^2} \rho d\rho d\phi$$

$$= \frac{2\pi a^5}{5}$$

TEOREMA STOKES

25. Buktikanlah Teorema Stokes.

Misalkan S adalah sebuah permukaan sehingga proyeksinya pada bidang xy , yz dan xz adalah daerah-daerah yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana seperti ditunjukkan pada Gambar 9-25. Andaikan S dapat dinyatakan oleh $z = f(x, y)$, atau $x = g(y, z)$, atau $y = h(x, z)$ di mana f, g, h fungsi bernilai tunggal, kontinu dan mempunyai turunan. Kita akan menunjukkan bahwa

$$\int_S \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$$

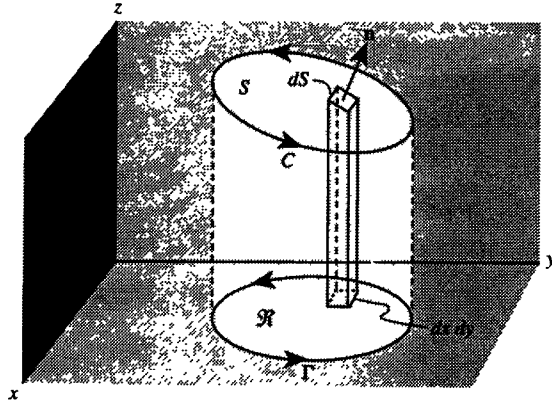
$$= \int_S \int [\nabla \times (A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k})] \cdot \vec{n} dS$$

$$= \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

di mana C adalah batas dari S .

Pertama kita perhatikan $\int_S \int [\nabla \times (A_1 \vec{i})] \cdot \vec{n} dS$.

$$\text{Karena } \nabla \times (A_1 \vec{i}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_1}{\partial z} \vec{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \vec{k},$$



Gambar 9-15

Maka $[\nabla \times (A_1 \vec{i})] \cdot \vec{n} dS = \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} \vec{n} \cdot \vec{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \vec{n} \cdot \vec{k} \right) dS \dots\dots\dots(1)$

Jika $z = f(x, y)$ diambil sebagai persamaan untuk S , maka vektor posisi suatu titik pada S adalah $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$

sehingga $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{k} = \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{k}$.

Tetapi $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$ adalah suatu vektor singgung pada s , sehingga ia tegak lurus pada \vec{n} .

Karena itu

$$\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{n} \cdot \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{n} \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{atau} \quad \vec{n} \cdot \vec{j} = - \frac{\partial z}{\partial y} \vec{n} \cdot \vec{k}$$

Substitusikanlah ini pada (1) untuk memperoleh

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} \vec{n} \cdot \vec{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \vec{n} \cdot \vec{k} \right) dS = \left(- \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \vec{n} \cdot \vec{k} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \vec{n} \cdot \vec{k} \right) dS$$

atau $[\nabla \times (A_1 \vec{i})] \cdot \vec{n} dS = - \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \vec{n} \cdot \vec{k} dS \dots\dots\dots(2)$

Sekarang pada S , $A_1(x, y, z) = A_1[x, y, f(x, y)] = F(x, y)$;

karena itu $\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}$ dan (2) menjadi

$$[\nabla \times (A_1 \vec{i})] \cdot \vec{n} dS = - \frac{\partial F}{\partial y} \vec{n} \cdot \vec{k} dS = - \frac{\partial F}{\partial y} dx dy$$

$$\text{Maka } \int_S \int [\nabla \times (A_1 \bar{i})] \cdot \bar{n} \, dS = \int_S \int -\frac{\partial F}{\partial y} \, dx \, dt$$

di mana R adalah proyeksi S pada bidang xy. Menurut Teorema Green untuk bidang, integral terakhir ini sama dengan $\oint_{\Gamma} F \, dx$ di mana Γ adalah batas dari R. Karena di setiap titik (x, y) pada B nilai F sama dengan nilai dari A_1 di setiap titik (x, y, z) pada C, dan karena dx sama untuk kedua kurva tersebut kita harus memperoleh

$$\oint_{\Gamma} F \, dx = \oint_C A_1 \, dx$$

$$\text{atau } \int_S \int [\nabla \times (A_1 \bar{i})] \cdot \bar{n} \, dS = \oint_C A_1 \, dx$$

Dengan cara yang sama, proyeksinya pada bidang koordinat yang lain memberikan

$$\int_S \int [\nabla \times (A_2 \bar{j})] \cdot \bar{n} \, dS = \oint_C A_2 \, dy, \quad \int_S \int [\nabla \times (A_3 \bar{k})] \cdot \bar{n} \, dS = \oint_C A_3 \, dz$$

Jadi dengan menjumlahkan diperoleh

$$\int_S \int (\nabla \times \bar{A}) \cdot \bar{n} \, dS = \oint_C \bar{A} \cdot d\bar{r}$$

Teorema ini juga berlaku untuk permukaan S yang tidak memenuhi batasan yang diberikan di atas. Dengan pengandaian bahwa S dapat dibagi menjadi permukaan S_1, S_2, \dots, S_k dengan batas C_1, C_2, \dots, C_k sehingga memenuhi batas di atas, maka Teorema Stokes berlaku untuk setiap permukaan. Jumlahkan integral permukaan ini, maka diperoleh integral permukaan atas S. Jumlahkan integral garis atas C_1, C_2, \dots, C_k yang berkaitan, maka diperoleh integral garis atas C.

26. Periksalah Teorema Stokes untuk $A = 3y\bar{i} - xz\bar{j} + yz^2\bar{k}$, di mana S adalah permukaan paraboloida $2z = x^2 + y^2$ yang dibatasi oleh $z = 2$ dan C sebagai batasnya.

Batas C dari S adalah suatu lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ dan persamaan parameternya adalah $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 2$ di mana $0 \leq t < 2\pi$. Maka

$$\begin{aligned} \oint_C \bar{A} \cdot d\bar{r} &= \oint_C [3y \, dx - xz \, dy + yz^2 \, dz] \\ &= \int_{2\pi}^0 [3(2 \sin t)(-2 \sin t) \, dt - (2 \cos t)(2)(2 \cos t) \, dt] \\ &= \int_0^{2\pi} (12 \sin^2 t + 8 \cos^2 t) \, dt = 20\pi \end{aligned}$$

Juga,

$$\nabla \times \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2 + x)\bar{i} - (z + 3)\bar{k}$$

dan
$$\bar{n} = \frac{\nabla(x^2 + y^2 - 2z)}{|\nabla(x^2 + y^2 - 2z)|} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} - \bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

Maka
$$\iint_R (\nabla \times \bar{A}) \cdot \bar{n} \, dS = \iint_R (\nabla \times \bar{A}) \cdot \bar{n} \frac{dx \, dy}{|\bar{n} \cdot \bar{k}|} = \iint_R (xz^2 + z^2 + z + 3) \, dx \, dy$$

$$= \iint_R \left\{ x \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^2 + x^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} + 3 \right\} \, dx \, dy$$

Dalam koordinat kutub, ini menjadi

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^2 \{ (\rho \cos \phi)(\rho^4/2) + \rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2/2 + 3 \} \rho \, d\rho \, d\phi = 20\pi$$

27. Buktikanlah bahwa suatu syarat perlu dan cukup agar $\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{r} = 0$ untuk setiap kurva tertutup C adalah kesamaan $\nabla \times \bar{A} = 0$ berlaku.

Syarat cukup. Andaikan $\nabla \times \bar{A} = 0$. Maka berdasarkan Teorema Stokes,

$$\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{r} = \iint_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot \bar{n} \, dS = 0$$

Syarat perlu.

Andaikan $\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{r} = 0$ di sekeliling setiap lintasan tertutup C, dan andaikan $\nabla \times \bar{A} \neq 0$ di suatu titik P. Kemudian andaikan $\nabla \times \bar{A}$ kontinu di suatu daerah P yang memuat P sebagai titik-dalamnya, di mana $\nabla \times \bar{A} \neq 0$. Misalkan S adalah suatu permukaan yang termuat dalam daerah itu dengan normalnya n di setiap titik mempunyai arah yang sama dengan $\nabla \times \bar{A}$, yaitu $\nabla \times \bar{A} = \alpha \bar{n}$ di mana α konstanta positif. Misalkan C batas dari S. Maka berdasarkan Teorema Stokes,

$$\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{r} = \iint_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot \bar{n} \, dS = \alpha \iint_S \bar{n} \cdot \bar{n} \, dS > 0$$

yang bertentangan dengan hipotesa bahwa $\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{r} = 0$ dan ini menunjukkan bahwa $\nabla \times \bar{A} = 0$.

Ini mengakibatkan bahwa $\nabla \times \bar{A} = \bar{0}$ juga suatu syarat perlu dan cukup untuk suatu integral garis $\int_{P_1}^{P_2} \bar{A} \cdot d\bar{r}$ tidak bergantung pada lintasan yang menghubungkan P_1 dan P_2 .

28. Buktikanlah bahwa suatu syarat perlu dan cukup agar $\nabla \times \bar{A} = 0$ adalah $\bar{A} = \nabla\phi$.
 Syarat cukup : Jika $\bar{A} = \nabla\phi$, maka $\nabla \times \bar{A} = \nabla \times \nabla\phi = 0$.
 Buktikan bahwa curl grad $U = 0$, nyatakan syarat yang sesuai untuk U .

Syarat perlu.

Jika $\nabla \times \bar{A} = 0$, maka berdasarkan Soal 27, $\oint \bar{A} \cdot d\bar{r} = 0$ di sekeliling setiap lintasan tertutup dan $\int_C \bar{A} \cdot d\bar{r}$ tidak bergantung dari lintasan yang menghubungkan dua titik yang kita ambil sebagai (a, b, c) dan (x, y, z) . Kita definisikan

$$\phi(x, y, z) = \int_{(a, b, c)}^{(x, y, z)} \bar{A} \cdot d\bar{r} = \int_{(a, b, c)}^{(x, y, z)} (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz)$$

Maka

$$\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z) = \int_{(x, y, z)}^{(x + \Delta x, y, z)} [A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz]$$

Karena integral terakhir ini tidak bergantung pada lintasan yang menghubungkan (x, y, z) dan $(x + \Delta x, y, z)$, maka kita dapat memilih lintasan tersebut sebagai suatu garis lurus yang menghubungkan titik-titik ini, sehingga dy dan dz sama dengan nol. Jadi

$$\frac{\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y, z)}^{(x + \Delta x, y, z)} A_1 dx = A_1(x + \theta \Delta x, y, z) \quad 0 < \theta < 1$$

di mana di sini kita telah menggunakan hukum Nilai Rata-rata untuk integral.

Ambil limit kedua ruas ini untuk $\Delta x \rightarrow 0$, ini memberi $\partial\phi/\partial x = A_1$.

Dengan cara yang sama kita dapat menunjukkan bahwa $\partial\phi/\partial x = A_2$, $\partial\phi/\partial z = A_3$.

$$\text{Jadi } \bar{A} = A_1 \bar{i} + A_2 \bar{j} + A_3 \bar{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \bar{k} = \nabla\phi.$$

29. (a) Buktikanlah bahwa suatu syarat perlu dan cukup agar $A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = d\phi$, menjadi suatu persamaan diferensial eksak adalah $\nabla \times \vec{A} = 0$ di mana $\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$

(b) Tunjukkanlah bahwa dalam garis kasus berlaku

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} [A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz] = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} d\phi = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

(a) Syarat perlu :

Jika $A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$, maka

$$(a) \frac{\partial \phi}{\partial x} = A_1 \quad (a) \frac{\partial \phi}{\partial y} = A_2 \quad (3) \frac{\partial \phi}{\partial z} = A_3$$

Kemudian dengan mendifferensialkannya dengan pengandaian kekontinuan turunan parsial pertamanya, kita memperoleh

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x}$$

yang persis sama dengan syarat $\nabla \times \vec{A} = 0$.

Metode lain. Jika $A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = d\phi$, maka

$$\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} = \nabla \phi$$

dari sini, $\nabla \times \vec{A} = \nabla \times \nabla \phi = 0$.

Syarat cukup : Jika $\nabla \times \vec{A} = 0$, maka menurut Soal 28, $\vec{A} = \nabla \phi$ dan

$$A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = \vec{A} \cdot d\vec{r} = \nabla \phi \cdot d\vec{r} = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = d\phi$$

(b) Menurut (a), $\phi(x, y, z) = \int_{(a, b, c)}^{(x, y, z)} [A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz]$.

Tanpa menuliskan fungsi yang diintegrasikan, $A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$, kita memperoleh

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} [A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz] = \int_{(a, b, c)}^{(x_2, y_2, z_2)} [A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz] - \int_{(a, b, c)}^{(x_1, y_1, z_1)} [A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz] = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

30. (a) Buktikanlah bahwa $\vec{F} = (2xz^3 + 6y)\vec{i} + (6x - 2yz)\vec{j} + (3x^2z^2 - y^2)\vec{k}$ adalah suatu medan gaya yang konservatif. (b) Hitunglah $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ tidak bergantung dari lintasan C yang menghubungkan dua titik. Suatu syarat perlu dan cukup agar F konservatif adalah $\nabla \times \vec{F} = 0$.

$$\text{Karena di sini } \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^3+6y & 6x-2yz & 3x^2z^2-y^2 \end{vmatrix} = 0, \text{ maka F konservatif.}$$

(b) **Metode 1.**

Menurut Soal 29, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = (2xz^3 + 6y) dx + (6x - 2yz) dy + (3x^2z^2 - y^2) dz$ adalah suatu differensial eksak $d\phi$, di mana ϕ memenuhi

$$(1) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xz^3 + 6y \quad (2) \frac{\partial \phi}{\partial y} = 6x - 2yz \quad (3) \frac{\partial \phi}{\partial z} = 3x^2z^2 - y^2$$

Dari sini berturut-turut kita memperoleh

$$\phi = x^2z^3 + 6xy + f_1(y, z) \quad \phi = 5xy - y^2z + f_2(x, z) \quad \phi = x^2z^3 - y^2z + f_3(x, y)$$

Ini akan konsisten bilamana $f_1(y, z) = -y^2z + c$, $f_2(x, z) = x^2z^3 + c$, $f_3(x, y) = 6xy + c$ sehingga di sini $\phi = x^2z^3 + 6xy - y^2z + c$. Jadi menurut Soal 6.38,

$$\int_{(1, -1, 1)}^{(2, 1, -1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = x^2z^3 + 6xy - y^2z + c \Big|_{(1, -1, 1)}^{(2, 1, -1)} = 15$$

Sebagai kemungkinan lain, kita catat bahwa dengan pemeriksaan diperoleh

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= (2xz^3 dx + 3x^2z^2 dz) + (6y dx + 6x dy) - (2yz dy + y^2 dz) \\ &= d(x^2z^3) + d(6xy) - d(y^2z) = d(x^2z^3 + 6xy - y^2z + c) \end{aligned}$$

dan di sini ϕ ditentukan.

Metode 2.

Karena integralnya tidak bergantung pada lintasan, kita dapat memilih suatu lintasan untuk menghitungnya; khususnya kita dapat memilih lintasan yang memuat garis lurus dari (1, 1, 1) ke (2, -1, 1), kemudian dilanjutkan ke (2, 1, 1) dan setelah itu ke (2, 1, -1). Hasilnya adalah

$$\int_{x=1}^2 (2x - 6) dx + \int_{y=-1}^1 (12 - 2y) dy + \int_{z=1}^{-1} (12z^2 - 1) dz = 15$$

di mana integral pertama diperoleh dari integral garis dengan memisalkan $y = -1$, $z = 1$, $dy = 0$, $dz = 0$; integral kedua dengan memisalkan $x = 2$, $z = 1$, $dx = 0$, $dz = 0$; dan integral yang ketiga dengan memisalkan $x = 2$, $y = 1$, $dx = 0$, $dy = 0$.

- (c) Secara fisis $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ menyatakan usaha yang dilakukan untuk menggerakkan suatu obyek dari $(1, -1, 1)$ ke $(2, 1, -1)$ sepanjang C . Dalam suatu medan gaya konservatif, usaha yang dilakukan tidak bergantung pada lintasan C yang menghubungkan titik-titik ini.

9.11. SOAL-SOAL LATIHAN

INTEGRAL LIPAT DUA

- (a) Gambarkanlah daerah R di bidang xy yang dibatasi oleh $y^2 = 2x$ dan $y = x$. (b) Tentukanlah luas daerah R . (c) Tentukanlah momen inersia kutub dari R , andaikan rapat massanya tetap sebesar σ .
- Tentukanlah pusat daerah pada Soal 1.
- Diketahui $\int_{y=0}^3 \int_{x=0}^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy$. (a) Gambarkanlah daerahnya dan berikanlah suatu tafsiran fisik yang mungkin dari integral lipat dua ini. (b) Ubahlah urutan pengintegrasian. (c) Hitunglah integral lipat dua ini.
- Tunjukkanlah bahwa $\int_{x=1}^2 \int_{y=\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy dx + \int_{x=2}^4 \int_{y=\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy dx = \frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$
- Tentukanlah isi tetrahedron (bidang-4) yang dibatasi oleh $x/a + y/b + z/c = 1$ dan bidang-bidang koordinat.
- Tentukanlah isi daerah yang dibatasi oleh $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = -a$, $x = a$, $y = -a$, $y = a$.
- Tentukanlah (a) momen inersia terhadap sumbu x dan (b) pusat dari daerah pada Soal 6.

INTEGRAL LIPAT TIGA

- (a) Hitunglah $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^2 xyz dz dy dx$. (b) Berikanlah suatu tafsiran fisis untuk integral pada (a).

9. Tentukanlah (a) isi dan (b) pusat daerah di oktan pertama yang dibatasi oleh $x/a + y/b + z/c = 1$, dimana a, b, c positif.
10. Tentukanlah (a) momen inersia dan (b) jari-jari kitaran terhadap sumbu z dari daerah pada Soal 9.
11. Tentukanlah massa daerah yang bersesuaian dengan $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $z \geq 0$, jika rapat massanya sama dengan xyz .
12. Tentukanlah isi daerah yang dibatasi $z = x^2 + y^2$ dan $z = 2x$.

TRANSFORMASI PADA INTEGRAL LIPAT DUA

13. Hitunglah $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, di mana r adalah daerah $x^2 + y^2 \leq a^2$.
14. Hitunglah $\iint_R e^{-(x^2 + y^2)} \, dx \, dy$, jika R adalah daerah pada Soal 13.
15. Dengan menggunakan transformasi $x + y = u$, $y = uv$, tunjukkanlah bahwa

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} e^{y/(x+y)} \, dy \, dx = \frac{e-1}{2}$$

16. Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh $xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 5$, $xy^3 = 15$. [Petunjuk : Misalkan $xy = u$, $xy^3 = v$.]
17. Tunjukkanlah bahwa isi benda yang diperoleh dengan memutar daerah di kuadran pertama yang dibatasi oleh parabola $y^2 = x$, $y^2 = 8x$, $x^2 = y$, $x^2 = 8y$ terhadap sumbu x adalah $279\pi/2$. [Petunjuk : Misalkan $y^2 = ux$, $x^2 = vy$.]
18. Tentukanlah luas daerah di kuadran pertama yang dibatasi oleh $y = x^3$, $y = 4x^3$, $x = y^3$, $x = 4y^3$.
19. Misalkan R adalah daerah yang dibatasi oleh $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$. Tunjukkanlah bahwa

$$\int_R \int \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \, dx \, dy = \sin 1. \text{ [Petunjuk : Misalkan } x-y = u, x+y = v \text{]}$$

TRANSFORMASI PADA INTEGRAL LIPAT TIGA

20. Tentukanlah isi daerah yang dibatasi oleh $z = 4 - x^2 - y^2$ dan bidang xy .

21. Tentukanlah pusat daerah pada Soal 20, andaikan rapat massanya tetap sebesar σ .
22. (a) Hitunglah $\int_R \int \int \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, di mana R adalah daerah yang dibatasi oleh bidang $z = 3$ dan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (b) Berikanlah suatu tafsiran fisis dari integral pada (a) [Petunjuk : Bentuklah integral tersebut dalam koordinat silinder dengan urutan ρ, z, ϕ].
23. Tunjukkanlah bahwa isi daerah yang dibatasi oleh kerucut $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan paraboloida $z = x^2 + y^2$ adalah $\pi/6$.
24. Tentukanlah momen inersia dari suatu silinder lingkaran tegak berjari-jari a dan tinggi b terhadap sumbunya jika rapat massanya di setiap titik sebanding dengan jaraknya ke sumbu tersebut.
25. (a) Hitunglah $\iiint_R \frac{dx \, dy \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, di mana R adalah daerah yang dibatasi oleh bola $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ dan $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ dengan $z > b > 0$. (b) Berikanlah suatu tafsiran fisis dari integral pada (a).
26. (a) Tentukanlah isi daerah yang di atas dibatasi oleh bola $r = 2a \cos \theta$, dan di bawah dengan kerucut $\phi = \alpha$, di mana $0 < \alpha < \pi/2$. (b). Bahaslah untuk kasus $\alpha = \pi/2$.
27. Tentukanlah pusat suatu potongan setengah bola yang jari-jari luarnya a dan jari-jari dalamnya b jika rapat massanya (a) tetap, (b) berubah sebanding jarak kuadratnya terhadap alas. Bahaslah kasus $a = b$.

INTEGRAL GARIS

28. Hitunglah $\int_{(1,1)}^{(4,2)} [(x + y) \, dx + (y - x) \, dy]$ sepanjang (a) parabola $y^2 = x$, (b) suatu garis lurus, (c) garis lurus dari $(1, 1)$ ke $(1, 2)$ dan dilanjutkan ke $(4, 2)$, (d) kurva $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$.
29. Hitunglah $\int_C [(2x - y + 4) \, dx + (5y + 3x - 6) \, dy]$ di sekeliling suatu segitiga pada bidang xy dengan titik-titik sudut $(0, 0), (3, 0), (3, 2)$ yang dijalani berlawanan dengan arah jarum jam.
30. Hitunglah integral garis pada soal sebelumnya di sekeliling suatu lingkaran berjari-jari 4 dan berpusat di $(0, 0)$.

31. (a) Jika $F = (x^2 - y^2)\bar{i} + 2xy\bar{j}$, hitunglah $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$ sepanjang kurva C di bidang xy yang persamaannya $y = x^2 - x$ dari titik $(1, 0)$ ke $(2, 2)$. (b) Berikanlah tafsiran fisis dari hasil yang diperoleh.
32. Hitunglah $\int_C (2x + y) ds$, di mana C adalah kurva pada bidang xy yang persamaannya $x^2 + y^2 = 25$ dan s adalah panjang busur parameter dari titik $(3, 4)$ ke $(4, 3)$ sepanjang lintasan terpendek.
33. Jika $f = (3x - 2y)\bar{i} + (y + 2z)\bar{j} - x^2\bar{k}$, hitunglah $\int_C F \cdot d\bar{r}$ dari $(0, 0, 0)$ ke $(1, 1, 1)$ di mana C adalah lintasan yang terdiri dari (a) kurva $x = t, y = t^2, z = t^3$, (b) suatu garis lurus yang menghubungkan titik tersebut. (c) garis lurus dari $(0, 0, 0)$ ke $(0, 1, 0)$, kemudian ke $(0, 1, 1)$ dan setelah itu ke $(1, 1, 1)$. (d) kurva $x = z^2, z = y^2$.
34. Jika T adalah vektor singgung satuan pada suatu kurva C (di bidang atau di ruang) dan F adalah suatu medan gaya yang diberikan, buktikanlah bahwa terhadap syarat yang sesuai akan berlaku $\int_C F \cdot d\bar{r} = \int_C F \cdot T ds$ di mana s adalah panjang busur parameter. Tafsirlah hasilnya secara fisis dan ilmu ukur.

TEOREMA GREEN PADA BIDANG KETIDAKBERGANTUNGAN PADA LINTASAN.

35. Periksalah Teorema Green pada bidang untuk $\oint_C [(x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy]$ di mana C adalah suatu bujur sangkar dengan titik-titik sudut $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$.
36. Hitunglah integral garis dari (a) Soal 29 dan (b) Soal 30 dengan menggunakan Teorema Green.
37. (a) Misalkan C adalah sembarang kurva tertutup sederhana yang membatasi suatu daerah dengan luas A . Buktikanlah bahwa jika $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ adalah konstanta, maka

$$\oint_C [(a_1x + a_2y + a_3) dx + (b_1x + b_2y + b_3) dy] = (b_1 - a_2)A$$

(b) Terhadap syarat apakah integral garis di sekeliling suatu lintasan akan menjadi nol?

38. Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh hiposikloida $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
[Petunjuk : Persamaan parameternya adalah $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$.]

39. Jika $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, buktikanlah bahwa $\frac{1}{2} \int [x dy - y dx] = \frac{1}{2} \int \rho^2 d\theta$ dan berikanlah tafsirannya.
40. Periksa Teorema Green pada bidang untuk $\int_C [(x^3 - x^2y) dx + xy^2 dy]$, di mana C adalah batas daerah yang dibatasi lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ dan $x^2 + y^2 = 16$.
41. (a) Buktikanlah bahwa $\int_{(1,0)}^{(2,1)} [(2xy - y^4 + 3) dx + (dx + (x^2 - 4xy^3) dy)]$ tidak bergantung pada lintasanyang menghubungkan $(1, 0)$ dan $(2, 1)$. (b) Hitunglah integral pada (a).
42. Hitunglah $\int_C [(2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2y^2) dy]$ sepanjang parabola $2x = \pi y^2$ dari $(0, 0)$ ke $(\pi/2, 1)$.
43. Hitunglah integral garis pada soal sebelumnya di sekeliling suatu jajaran genjang dengan titik-titik sudut $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(5, 2)$, $(2, 2)$.
44. Buktikanlah bahwa jika $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ mendefinisikan suatu transformasi yang memetakan suatu daerah r pada bidang xy menjadi daerah R' di bidang uv , maka

$$\int_R \int dx dy = \int_{R'} \int \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

dengan menggunakan teorema Green pada integral $\frac{1}{2} \int_C [x dy - y dx]$ dan tafsirkanlah secara ilmu ukur.

INTEGRAL PERMUKAAN

45. (a) Hitunglah $\int_S \int (x^2 + y^2) dS$, di mana S adalah permukaan kerucut $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ yang dibatasi oleh $z = 0$ dan $z = 3$. (b) Tafsirkanlah secara fisis hasil dari (a).
46. Tentukanlah luas permukaan bidang $2x + y + 2z = 16$ yang dipotong oleh (a) $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 3$, (b) $x = 0$, $y = 0$ dan $x^2 + y^2 = 64$.
47. Tentukanlah luas permukaan paraboloida $2z = x^2 + y^2$ yang terletak di luar kerucut $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
48. Tentukanlah luas permukaan daerah persekutuan yang diperoleh dengan mengiris silinder $x^2 + y^2 = a^2$ dan $x^2 + z^2 = z^2$.

- 50: (a) Tunjukkanlah bahwa umumnya persamaan $r = r(u, v)$ secara ilmu ukur menyatakan suatu permukaan. (b) Bahaslah arti ilmu ukur dari $u = c_1$, $v = c_2$ di mana c_1 dan c_2 konstanta. (c) Buktikanlah bahwa elemen panjang busur pada permukaan ini diberikan oleh

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$$\text{di mana } E = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial u}, F = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial v}, G = \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial r}{\partial v}$$

51. (a) Sehubungan dengan Soal 50, tunjukkanlah bahwa elemen luas permukaannya diberikan oleh $dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$.

(b) Dari (a), turunkanlah bahwa luas permukaan $r = r(u, v)$ adalah $\int_S \int \sqrt{EG - F^2} du dv$.

[Petunjuk :

$$\text{Gunakanlah kenyataan bahwa } \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right)}$$

dan kemudian gunakanlah kesamaan $(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot (\bar{C} \times \bar{D}) = (\bar{A} \cdot \bar{C})(\bar{B} \cdot \bar{D}) - (\bar{A} \cdot \bar{D})(\bar{B} \cdot \bar{C})$.

52. (a) Buktikanlah bahwa $\bar{r} = (a \sin u \cos v)\bar{i} + a(\sin u \sin v)\bar{j} + (a \cos u)\bar{k}$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$ menyatakan suatu bola berjari-jari a . (b) Gunakan soal 51 untuk menunjukkan bahwa luas permukaan bola tersebut adalah $4\pi a^2$.

TEOREMA DIVERGENSI

53. Periksalah teorema divergensi untuk $\bar{A} = (2xy + z)\bar{i} + y^2\bar{j} - (x + 3y)\bar{k}$ pada daerah yang dibatasi oleh $2x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
54. Hitunglah $\int_S \int \bar{F} \cdot \bar{n} dS$, di mana $F = (z^2 - x)\bar{i} - xy\bar{j} + 3z\bar{k}$ dan S adalah permukaan yang dibatasi oleh $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$ dan bidang xy .
55. Hitunglah $\int_S \int \bar{A} \cdot \bar{n} dS$, di mana $A = (2x + 3z)\bar{i} - (xz + y)\bar{j} + (y^2 + 2z)\bar{k}$ dan S adalah permukaan bola yang berpusat di $(3, -1, 2)$ dan berjari-jari 3.
56. Tentukanlah nilai $\int_S \int [x dy dz + y dz dx + z dx dy]$, di mana S adalah permukaan yang dibatasi silinder $x^2 + y^2 = 9$ dan bidang $x = 0$ dan $z = 3$, (a) dengan menggunakan teorema divergensi, (b) langsung.

57. Hitunglah $\int_S \int [4xz \, dy \, dz - y^2 \, dz \, dx + yz \, dx \, dy]$, di mana S adalah permukaan kubus yang dibatasi oleh $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$, (a) langsung, (b) dengan menggunakan teorema green di ruang (teorema divergensi).
58. Buktikanlah bahwa $\int_S \int (\nabla \times \bar{A}) \cdot \bar{n} \, dS = 0$ untuk suatu permukaan tertutup S.
59. Buktikanlah bahwa $\int_S \int \bar{n} \, dS = 0$, di mana \bar{n} adalah normal yang digambarkan ke luar pada permukaan tertutup S.
60. Jika \bar{n} adalah normal satuan yang digambarkan ke luar pada suatu permukaan tertutup S yang membatasi daerah V, buktikan bahwa

$$\int_V \int \int \operatorname{div} \bar{n} \, dV = 0$$

TEOREMA STOKES

61. Periksa Teorema Stokes untuk $\bar{A} = 2y\bar{i} + 3xz\bar{j} - z^2\bar{k}$, di mana S adalah separuh permukaan bagian atas bola $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ dan C adalah batasnya.
62. Periksa Teorema Stokes untuk $\bar{A} = (y + z)\bar{i} - xz\bar{j} + y^2\bar{k}$, di mana S adalah permukaan dari daerah di oktan pertama yang dibatasi oleh $2x + z = 6$ dan $y = 2$ dan tidak terletak dalam (a) bidang xy , (b) bidang $y = 2$, (c) bidang $2x + z = 6$ dan C adalah batas yang bersesuaian.
63. Hitunglah $\int_S \int (\nabla \times \bar{A}) \cdot \bar{n} \, dS$, di mana $\bar{A} = (x - z)\bar{i} + (x^3 + yz)\bar{j} - 3xy^2\bar{k}$ dan S adalah permukaan kerucut $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ di atas bidang xy .
64. Jika V adalah daerah yang dibatasi oleh permukaan tertutup S dan $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$, buktikanlah bahwa $\int_S \int \bar{B} \cdot \bar{n} \, dS = 0$.
65. (a) Buktikanlah bahwa $\bar{F} = (2xy + 3)\bar{i} + (x^2 - 4z)\bar{j} - 4y\bar{k}$ adalah suatu medan gaya yang konservatif. (b) Tentukanlah ϕ sehingga $\bar{F} = \nabla\phi$. (c) Hitunglah $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$, di mana C adalah suatu lintasan dari $(3, -1, 2)$ ke $(2, 1, -1)$.
66. Misalkan C adalah suatu lintasan yang menghubungkan sebuah titik pada bola $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ke sebuah titik pada bola $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$. Tunjukkanlah bahwa jika $\bar{F} = 5r^3 \bar{r}$, di mana $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ maka $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = b^5 - a^5$.

67. Dalam Soal 66, hitunglah $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ jika $\vec{F} = f(r) \vec{r}$, di mana $f(r)$ diandaikan kontinu.
68. Selidikilah apakah ada fungsi ϕ sehingga $\vec{F} = \nabla\phi$, di mana
 (a) $\vec{F} = (xz - y)\vec{i} + (x^2y + z^3)\vec{j} + (3xz^2 - xy)\vec{k}$.
 (b) $\vec{F} = 2xe^{-y}\vec{i} + (\cos z - x^2e^{-y})\vec{j} - (y \sin z)\vec{k}$. Jika ada, tentukanlah.
69. Selesaikanlah persamaan differensial $(z^3 - 4xy) dx + (6y - 2x^2) dy + (3xz^2 + 1) dz = 0$.

JAWABAN SOAL-SOAL LATIHAN

1. (b) $2/3$; (c) $48\sigma/35 = 72m/35$, di mana M adalah massa dari R .
2. $\bar{x} = 4/5, \bar{y} = 1$
3. (b) $\int_{x=1}^2 \int_{y=0}^{4-x^2} (x+y) dy dx$, (c) $241/60$
5. $abc/6$
6. $8a^4/3$
7. (a) $\frac{112}{45} a^6\sigma = \frac{14}{15} Ma^2$, di mana $M =$ massa
 (b) $x = y = 0, z = \frac{7}{15} a^2$
8. (a) $3/8$
9. (a) $abc/6$; (b) $\bar{x} = a/4, \bar{y} = b/4, \bar{z} = c/4$
10. (a) $M(a^2 + b^2)/10$. (b) $\sqrt{(a^2 + b^2)}/10$
11. $4/3$
12. $\pi/2$
12. $\pi/2$
13. $\frac{2}{3} \pi a^3$

14. $\pi(1 - e^{-a^2})$
16. $2 \ln 3$
18. $1/8$
20. 8π
21. $x = y = 0, z = 4/3$
22. $27\pi(2\sqrt{2} - 1)/2$
24. $3/5 Ma^2$
25. (a) $4\pi \ln (a/b)$
26. $4/8 \pi a^3(1 - \cos^4 \alpha)$
27. Ambil sumbu z sebagai sumbu simetri
 (a) $\bar{x} = \bar{y} = 0, z = 8/8 (a^4 - b^4)/(a^3 - b^3)$;
 (b) $\bar{x} = \bar{y} = 0, z = 5/8 (a^6 - b^6)/(a^5 - b^5)$
28. (a) $34/3$; (b) 11, (c) 14, (d) $32/3$.
29. 12
30. 64π
31. (a) $124/15$
32. 15
33. (a) $23/15$, (b) $5/3$, (c) 0, (d) $13/30$.
35. Nilai bersama = 8
37. (b) $a_2 = b_1$
38. $3\pi a^2/8$
40. Nilai bersama = 120π
41. (b) 5

42. $\pi^2/4$
43. 0
45. (a) 9π
46. (a) 9, (b) 24π
47. $\frac{2}{8}\pi(5\sqrt{5} - 1)$
48. 6π
49. $16a^2$
53. Nilai bersama = 27
54. 16
55. 108π
56. 81π
57. $3/2$
61. Nilai bersama = 9π
62. Nilai bersama tersebut adalah (a) -6, (b) -9, (c) -18
63. 12π
64. (b) $\phi = x^2y - 4yz + 3x + \text{konstanta}$ (c) 6
66. $\int_a^b r f(r) dr$
67. (a) ϕ tidak ada.
 (b) $\phi = x^2e^{-y} \cos z + \text{konstanta}$.
68. $xz^3 - 2x^2y + 3y^2 + z = \text{konstanta}$.