



# Bentuk tak Tentu dan Integral tak Wajar



001

## Bentuk tak Tentu Limit Fungsi

### Jenis Bentuk tak Tentu Limit Fungsi

✚ **Bentuk tak Tentu 0/0** Akan dihitung

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}; \text{ dengan } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

**Ilustrasi:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 4}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(x - \sqrt{x} - 2)}{x - 4}$ , dan sebagainya.

✚ **Bentuk tak Tentu  $\infty/\infty$**  Akan dihitung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}; \text{ dengan } \lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)|.$$

**Ilustrasi:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 3x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 4}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x - 4}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x - 4}$ , dan sebagainya.

✚ **Bentuk tak Tentu  $0 \cdot \infty$**  Akan dihitung

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x); \text{ dengan } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = \infty.$$

Limit ini dapat diubah ke bentuk 0/0 karena  $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$  dengan

$f(x) \rightarrow 0$  dan  $\frac{1}{g(x)} \rightarrow 0$  dan ke bentuk  $\infty/\infty$  karena  $f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}$

dengan  $g(x) \rightarrow \infty$  dan  $\frac{1}{|f(x)|} \rightarrow \infty$ .

**Ilustrasi:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (x - \frac{1}{4}) \sec 2x$ , dan sebagainya.



✚ **Bentuk tak Tentu  $\infty - \infty$**  Akan dihitung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)); \text{ dengan } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ dan } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty.$$

Limit ini dapat diubah ke bentuk  $\infty/\infty$  dengan berbagai cara.

**Ilustrasi:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x} + x)$ ,

$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x^2)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2)$ , dan sebagainya.

✚ **Bentuk tak Tentu  $0^0$**  Dengan logaritma natural akan dihitung

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{g(x)}; \text{ dengan } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

**Ilustrasi:**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{3/(4+2 \ln x)}$ , dan sebagainya.

✚ **Bentuk tak Tentu  $\infty^0$**  Dengan logaritma natural akan dihitung

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{g(x)}; \text{ dengan } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0.$$

**Ilustrasi:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{1/\ln x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{1/\ln x}$ , dan sebagainya.

✚ **Bentuk tak Tentu  $1^\infty$**  Dengan logaritma natural akan dihitung

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{g(x)}; \text{ dengan } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 1 \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = \infty.$$

**Ilustrasi:**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x)^{1/\sin x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ , dan sebagainya.

## Berbagai Teknik Pemecahan Bentuk tak Tentu Limit Fungsi

- ✚ Untuk bentuk  $0/0$ , buatlah manipulasi aljabar sehingga bentuknya bukan  $0/0$ . Cobalah teorema l'Hôpital's atau prinsip apit (jika mungkin)
- ✚ Untuk bentuk  $\infty/\infty$ , munculkan  $1/x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) yang limitnya 0 pada pembilang dan penyebutnya, atau cobalah teorema l'Hôpital's jika mungkin.
- ✚ Untuk bentuk  $\infty - \infty$ , ubahlah menjadi  $\infty/\infty$  dengan merasionalkan, atau munculkan bentuk  $1/x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) yang limitnya 0.
- ✚ Untuk bentuk  $0^0$ ,  $\infty^0$ , dan  $0^\infty$ , ambil limit dari ln fungsinya kemudian gunakan teorema l'Hôpital's dan sifat kekontinuan ln.



## Teorema l'Hôpital's

### Aturan l'Hôpital's untuk Bentuk 0/0

✚ Jika  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$  dan  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  ada,  $\infty$ , atau  $-\infty$ , maka

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

✚ **Catatan**  $x \rightarrow c$  dapat diganti  $x \rightarrow c^+$ ,  $x \rightarrow c^-$ ,  $x \rightarrow \infty$ , atau  $x \rightarrow -\infty$ .

✚ Secara intuitif, jika  $f(x)$  dan  $g(x)$  balapan menuju 0, maka hasilnya bergantung pada perbandingan kecepatan  $f(x)$  dan  $g(x)$ , yaitu  $f'(x)/g'(x)$ .

### Aturan l'Hôpital's untuk Bentuk $\infty/\infty$

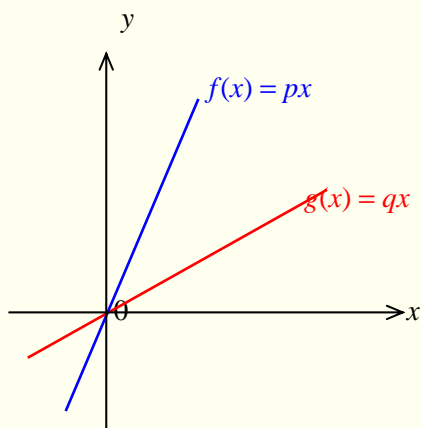
✚ Jika  $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)|$  dan  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  ada,  $\infty$ , atau  $-\infty$ , maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

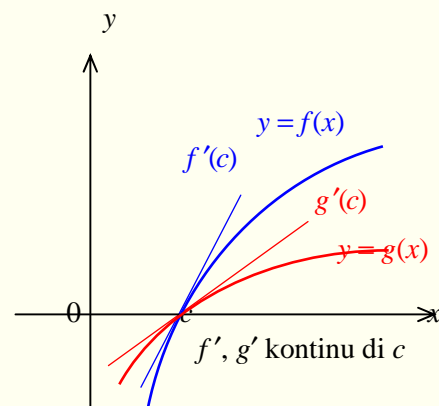
✚ **Catatan**  $x \rightarrow c$  dapat diganti  $x \rightarrow c^+$ ,  $x \rightarrow c^-$ ,  $x \rightarrow \infty$ , atau  $x \rightarrow -\infty$ .

✚ Secara intuitif, andaikan  $f(t)$  dan  $g(t)$  menyatakan posisi dua mobil yang bergerak di sumbu- $t$  dan pada saat  $t$  kecepatannya adalah  $f'(t)$  dan  $g'(t)$ . Jika perbandingan kecepatan kedua mobil adalah  $L$ , maka untuk jangka panjang perbandingan jarak kedua mobil juga sama dengan  $L$ .

### Arti Geometri Teorema l'Hôpital's untuk Bentuk 0/0



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{px}{qx} = \frac{p}{q} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$



## Aneka Ragam Contoh Bentuk tak Tentu Limit Fungsi

### Bentuk tak Tentu 0/0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos(\lim_{x \rightarrow 0} x) = \cos 0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{2 + 1}{2 + 2} = \frac{3}{4}.$$

*Cara lain*  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 4} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1} = \frac{3}{4}.$

$$\begin{aligned} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 2) - \sqrt{x}}{x - 4} \cdot \frac{(x - 2) + \sqrt{x}}{(x - 2) + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x + 4 - x}{(x - 4)((x - 2) + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{(x - 4)((x - 2) + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 1)}{(x - 4)((x - 2) + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 1}{x - 2 + \sqrt{x}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(x - \sqrt{x} - 2)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(x - \sqrt{x} - 2)}{x - \sqrt{x} - 2} \cdot \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(x - \sqrt{x} - 2)}{x - \sqrt{x} - 2} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 4} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{1 - x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 \ln x) \cdot \frac{1}{x}}{-2x} = \frac{0 \cdot 1}{-2} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan \pi x}{x^2 - 4} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\pi \sec^2 \pi x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\pi}{2x \cos^2 \pi x} = \frac{\pi}{2 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{4} \pi.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x + \sin x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{-x \sin x + \cos x + \cos x} = \frac{1}{0 + 1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \sin^2 x}{\cos x + \cos 2x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \sin 2x + \sin^2 x}{- \sin x - 2 \sin 2x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x(2 \cos 2x) + \sin 2x + \sin 2x}{- \cos x - 4 \cos 2x} = -\frac{2}{3} \pi.$$



### Bentuk tak Tentu $\infty/\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x^2}} = \frac{1-0}{1-0} = 1.$$

*Cara lain*  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 3x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x}{3x^2 - 3} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 2}{6x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{6} = 1.$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x \left(1 - \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{4}{x}} = \frac{1-0}{1-0} = 1.$$

*Cara lain*  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1-0}{1} = 1.$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x \left(2 - \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x \left(2 - \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{2 - \frac{4}{x}} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x \left(2 - \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x \left(2 - \frac{4}{x}\right)} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{2 - \frac{4}{x}} = -\frac{1}{2}.$$

Kedua contoh ini tak dapat diselesaikan dengan teorema l'Hôpital's.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 + 2\sec x}{\tan x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2\sec x \tan x}{\sec^2 x} = 2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\sec x} = 2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = 2.$$

### Bentuk tak Tentu $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \sec 2x = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{x - \frac{1}{4}\pi}{\cos 2x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1}{2 \sin 2x} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \cot x = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\tan x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \cos^2 x = (-1)^2 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$



## Bentuk tak Tentu $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1-x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x-x})(\sqrt{x^2+2x+x})}{\sqrt{x^2-2x+x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})+x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x+x})(\sqrt{x^2+2x-x})}{\sqrt{x^2-2x-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)} = \frac{-2}{\sqrt{1+0}+1} = -1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - \cos x}{x \cos x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x + \sin x + \sin x}{-x \sin x + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x + 2 \sin x}{-x \sin x + \cos x} = \frac{0 \cdot 1 + 2 \cdot 0}{-0 \cdot 0 + 1} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 1}{x \ln x} = \infty \text{ karena untuk } x \rightarrow 0^+, (\ln x + 1) \rightarrow -\infty \text{ dan } x \ln x \rightarrow 0 \text{ dari bawah.}$$

## Bentuk tak Tentu $0^0$

Untuk menghitung  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ , misalkan  $y = x^x$  dan hitunglah  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y$ . Dari

$y = x^x$  diperoleh  $\ln y = x \ln x$ , sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Karena fungsi  $\ln$  kontinu pada  $(0, \infty)$ , maka  $\ln \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \ln 1$ , akibatnya

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$



✚ Untuk menghitung  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ , misalkan  $y = x^{\sin x}$  dan hitunglah  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y$ .

Dari  $y = x^{\sin x}$  diperoleh  $\ln y = (\sin x) \ln x$ , sehingga

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Karena fungsi  $\ln$  kontinu pada  $(0, \infty)$ , maka  $\ln \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \ln 1$ , akibatnya

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = 1.$$

✚ Untuk menghitung  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{3/(4+2\ln x)}$ , misalkan  $y = x^{3/(4+2\ln x)}$  dan hitunglah

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y$ . Dari  $y = x^{3/(4+2\ln x)}$  diperoleh  $\ln y = \frac{3}{4+2\ln x} \cdot \ln x = \frac{3 \ln x}{4+2\ln x}$ , sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \ln x}{4+2\ln x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Karena fungsi  $\ln$  kontinu pada  $(0, \infty)$ , maka  $\ln \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \ln e^{3/2}$ , akibatnya

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{3/(4+2\ln x)} = e^{3/2} = e\sqrt{e}.$$

## Bentuk tak Tentu $\infty^0$

✚ Untuk menghitung  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ , misalkan  $y = x^{1/x}$  dan hitunglah  $\lim_{x \rightarrow \infty} y$ . Dari

$y = x^{1/x}$  diperoleh  $\ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln x = \frac{\ln x}{x}$ , sehingga

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Karena fungsi  $\ln$  kontinu pada  $(0, \infty)$ , maka  $\ln \lim_{x \rightarrow \infty} y = \ln 1$ , akibatnya

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = 1.$$



✚ Untuk menghitung  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{1/\ln x}$ , misalkan  $y = (\cot x)^{1/\ln x}$  dan hitung-

lah  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y$ . Dari  $y = (\cot x)^{1/\ln x}$  diperoleh  $\ln y = \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \cot x = \frac{\ln \cot x}{\ln x}$ , se-

$$\text{hingga } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{-1}{\cos x} = -1.$$

Karena fungsi  $\ln$  kontinu pada  $(0, \infty)$ , maka  $\ln \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \ln e^{-1}$ , akibatnya

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{1/\ln x} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

### Bentuk tak Tentu $1^\infty$

✚ Untuk menghitung  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x)^{1/\sin x}$ , misalkan  $y = (1-x)^{1/\sin x}$ , dan hitung-

lah  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y$ . Dari  $y = (1-x)^{1/\sin x}$ , diperoleh  $\ln y = \frac{1}{\sin x} \cdot \ln(1-x) = \frac{\ln(1-x)}{\sin x}$ ,

$$\text{sehingga } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x)}{\sin x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{1} = -1.$$

Karena fungsi  $\ln$  kontinu pada  $(0, \infty)$ , maka  $\ln \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \ln e^{-1}$ , akibatnya

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x)^{1/\sin x} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

✚ Untuk menghitung  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ , misalkan  $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ , dan hitunglah

$\lim_{x \rightarrow \infty} y$ . Dari  $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ , diperoleh  $\ln y = x \ln \frac{x+1}{x}$ , sehingga

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Karena fungsi  $\ln$  kontinu pada  $(0, \infty)$ , maka  $\ln \lim_{x \rightarrow \infty} y = \ln e$ , akibatnya

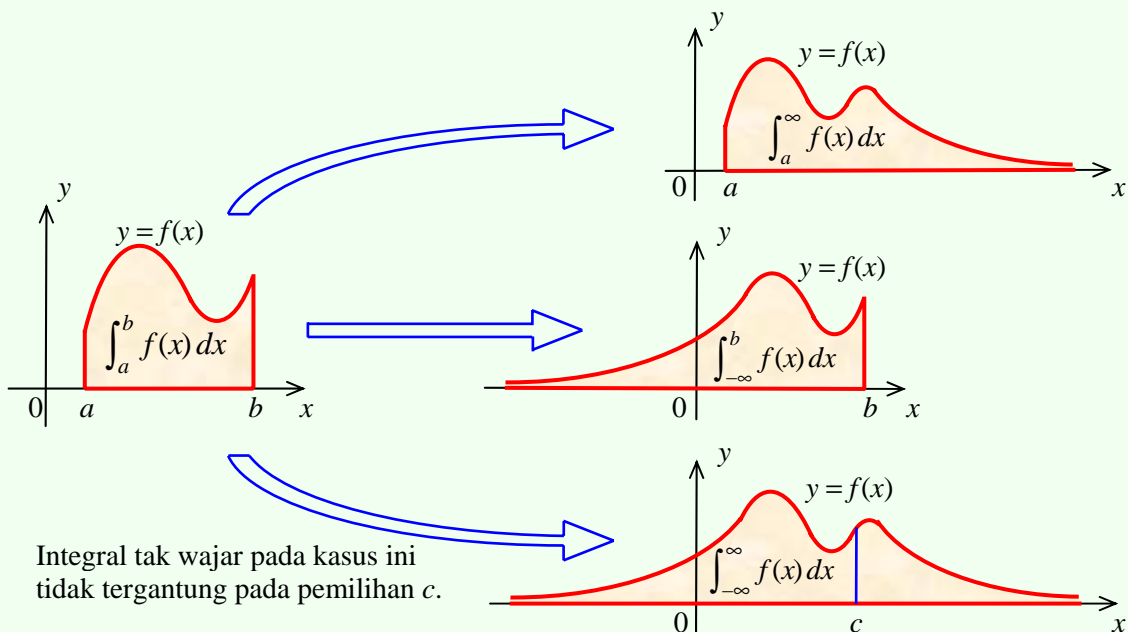
$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e.$$



# Integral tak Wajar

## Jenis Integral tak Wajar

### Integral tak wajar pada selang tak hingga



➤ Integral tak wajar dari fungsi terintegralkan  $y = f(x)$  pada selang tak terbatas  $[a, \infty)$  didefinisikan sebagai  $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ .

➤ Integral tak wajar dari fungsi terintegralkan  $y = f(x)$  pada selang tak terbatas  $(-\infty, b]$  didefinisikan sebagai  $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ .

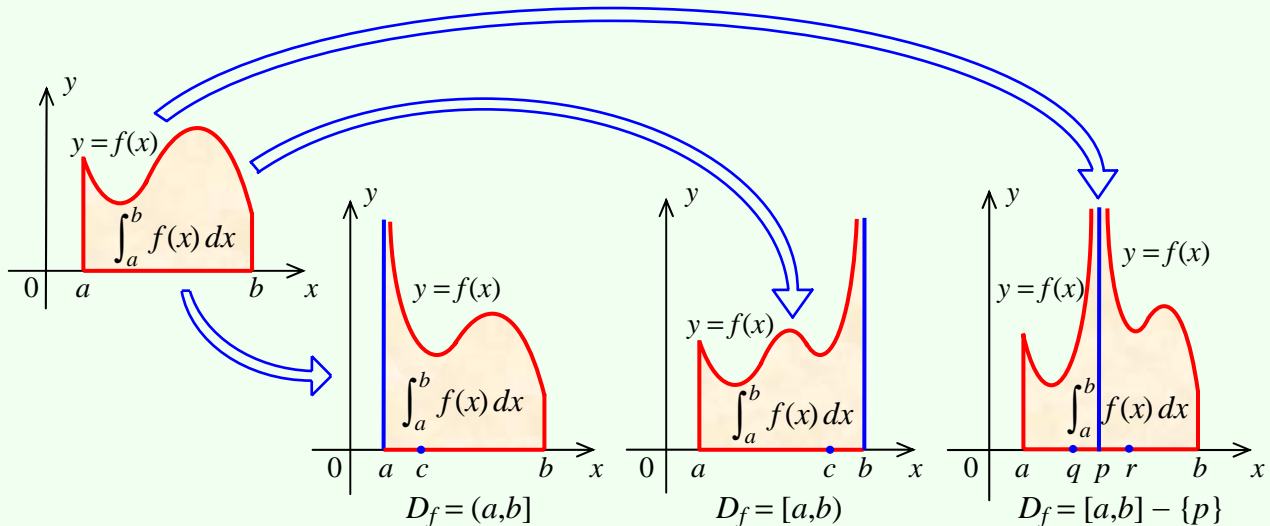
➤ Integral tak wajar dari fungsi terintegralkan  $y = f(x)$  pada selang tak terbatas  $(-\infty, \infty)$  didefinisikan sebagai

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx.$$

**Kekonvergenan integral tak wajar** Jika semua limit di atas ada dan bernilai hingga, integral tak wajarnya dikatakan **konvergen** dan jika tidak demikian dikatakan **divergen** (limitnya  $\pm\infty$  atau kurva berskilasi).



### **Integral tak wajar pada selang tak hingga**



➤ Integral tak wajar dari fungsi terintegralkan  $y = f(x)$  pada selang terbatas  $(a, b]$  didefinisikan sebagai  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$ . Dengan penggantian  $\varepsilon = c - a$  diperoleh  $c = a + \varepsilon$  dan  $c \rightarrow a^+ \Leftrightarrow \varepsilon \rightarrow 0^+$ , sehingga  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ .

➤ Integral tak wajar dari fungsi terintegralkan  $y = f(x)$  pada selang terbatas  $[a, b)$  didefinisikan sebagai  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ . Dengan penggantian  $\varepsilon = b - c$  diperoleh  $c = b - \varepsilon$  dan  $c \rightarrow b^- \Leftrightarrow \varepsilon \rightarrow 0^+$ , sehingga  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ .

➤ Integral tak wajar dari fungsi terintegralkan  $y = f(x)$  pada selang terbatas  $[a, b] - \{p\}$  didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^b f(x) dx = \lim_{q \rightarrow p^-} \int_a^q f(x) dx + \lim_{r \rightarrow p^+} \int_r^b f(x) dx.$$

**Kekonvergenan integral tak wajar** Jika semua limit di atas ada dan bernilai hingga, integral tak wajarnya dikatakan **konvergen** dan jika tidak demikian dikatakan **divergen** (limitnya  $\pm\infty$  atau kurva beroskilasi).



### Aneka Ragam Contoh Integral tak Wajar pada Selang tak Hingga

✚ Integral tak wajar dari fungsi kontinu  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  pada  $[1, \infty)$  adalah

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right)_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1 \text{ (konvergen).}$$

✚ Integral tak wajar dari fungsi kontinu  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  pada  $[1, \infty)$  adalah

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(2\sqrt{x}\right)_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} 2(\sqrt{b} - 1) = \infty \text{ (divergen)}$$

✚ Integral tak wajar dari fungsi kontinu  $f(x) = \sin x$  pada  $[0, \infty)$  adalah

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin x \, dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin x \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (-\cos x)_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (-\cos b + 1) \\ &= \text{tidak ada (divergen)}. \end{aligned}$$

✚ Integral tak wajar dari fungsi kontinu  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  pada  $[-\infty, -1)$  adalah

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}x^{2/3}\right)_a^{-1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{3}{2}(1 - a^{2/3}) = -\infty \text{ (divergen)}$$

✚ Integral tak wajar dari fungsi kontinu  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  pada  $(-\infty, \infty)$  adalah

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\tan^{-1}x\right)_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\tan^{-1}x\right)_0^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\tan^{-1}a\right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\tan^{-1}b\right) \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\pi\right) + \frac{1}{2}\pi = \pi \text{ (konvergen)}. \end{aligned}$$

✚ Integral tak wajar dari fungsi kontinu  $f(x) = \cosh x$  pada  $(-\infty, \infty)$  adalah

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cosh x \, dx &= \int_{-\infty}^0 \cosh x \, dx + \int_0^{\infty} \cosh x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \cosh x \, dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cosh x \, dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\sinh x\right)_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\sinh x\right)_0^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\sinh a\right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\sinh a\right) \\ &= -(-\infty) + \infty = \infty \text{ (divergen)}. \end{aligned}$$



### Aneka Ragam Contoh Integral tak Wajar pada Selang Hingga

✚ Fungsi  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$  kontinu pada  $(1,5]$  dengan  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \infty$ . Integral

tak wajar dari fungsi  $f$  pada selang tutup  $[1,5]$  adalah

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{c \rightarrow 1^+} \left( 2\sqrt{x-1} \right)_c^5 = \lim_{c \rightarrow 1^+} \left( 4 - 2\sqrt{c-1} \right) = 4 \text{ (konvergen).}$$

✚ Fungsi  $f(x) = \ln x$  kontinu pada  $(0,1)$  dengan  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ . Integral tak

wajar dari fungsi  $f$  pada selang tutup  $[0,1]$  adalah

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left( x \ln x - x \right)_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left( -1 - c \ln c + c \right) = -1 \text{ (konvergen).}$$

✚ Fungsi  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  kontinu pada  $[-1,1)$  dengan  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ . Integral

tak wajar dari fungsi  $f$  pada selang tutup  $[-1,1]$  adalah

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_{-1}^c \frac{dx}{x-1} = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_{-1}^c \frac{d(x-1)}{x-1} = \lim_{c \rightarrow 1^-} \left( \ln|x-1| \right)_{-1}^c \\ &= \lim_{c \rightarrow 1^-} \left( \ln|c-1| - \ln 2 \right) = -\infty \text{ (divergen).} \end{aligned}$$

✚ Fungsi  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$  kontinu pada  $[0,3)$  dengan  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \infty$ . Integral

tak wajar dari fungsi  $f$  pada selang tutup  $[0,3]$  adalah

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{c \rightarrow 3^-} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{c \rightarrow 3^-} \left( \sin^{-1} \frac{x}{3} \right)_0^c = \lim_{c \rightarrow 3^-} \left( \sin^{-1} \frac{c}{3} - 0 \right) \\ &= \sin^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi \text{ (konvergen).} \end{aligned}$$

✚ Fungsi  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  kontinu pada  $[-1,0) \cup (0,1]$  dengan  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ . Inte-

gral tak wajar dari fungsi  $f$  pada selang tutup  $[-1,1]$  adalah

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{q \rightarrow 0^-} \int_{-1}^q \frac{dx}{x^2} + \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_r^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{q \rightarrow 0^-} \left( -\frac{1}{x} \right)_{-1}^q + \lim_{r \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{x} \right)_r^1 \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^-} \left( -\frac{1}{q} - 1 \right) + \lim_{r \rightarrow 0^+} \left( -1 + \frac{1}{r} \right) = \infty + \infty = \infty \text{ (divergen).} \end{aligned}$$



✚ Fungsi  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$  kontinu pada  $[0,1) \cup (1,2]$  dengan  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = \pm\infty$ .

Integral tak wajar dari fungsi  $f$  pada selang tutup  $[0,1]$  adalah

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{q \rightarrow 1^-} \int_0^q \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{r \rightarrow 1^+} \int_r^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \left( \frac{3}{2}(x-1)^{2/3} \right)_0^q + \lim_{r \rightarrow 1^+} \left( \frac{3}{2}(x-1)^{2/3} \right)_r^2 \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \left( \frac{3}{2}(q-1)^{2/3} - \frac{3}{2} \right) + \lim_{r \rightarrow 1^+} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2}(r-1)^{2/3} \right) \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0 \text{ (konvergen)}. \end{aligned}$$

### *Aneka Ragam Variasi Contoh Integral tak Wajar*

✚ Selidiki kekonvergenan integral tak wajar  $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} x \, dx$ .

➤ Integral tak tentu dari  $f(x) = \operatorname{sech} x$  adalah

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sech} x \, dx &= \int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{2e^x dx}{e^{2x} + 1} \\ &= 2 \int \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2} = 2 \tan^{-1} e^x + C \end{aligned}$$

➤ Integral tak wajar dari  $f(x) = \operatorname{sech} x$  yang kontinu pada  $(-\infty, \infty)$  adalah

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} x \, dx &= \int_{-\infty}^0 \operatorname{sech} x \, dx + \int_0^{\infty} \operatorname{sech} x \, dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \operatorname{sech} x \, dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \operatorname{sech} x \, dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( 2 \tan^{-1} e^x \right)_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \left( 2 \tan^{-1} e^x \right)_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2}\pi - 2 \tan^{-1} e^a \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left( 2 \tan^{-1} e^b - \frac{1}{2}\pi \right) \\ &= \frac{1}{2}\pi - 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = \pi \text{ (konvergen)}. \end{aligned}$$



✚ Selidiki kekonvergenan integral tak wajar  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ .

➤ Integral tak tentu dari  $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$  pada  $(0, \infty)$  adalah

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \tan^{-1} \sqrt{x} + C$$

➤ Jenis integral tak wajar ini pada selang hingga dan selang tak hingga karena  $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$  kontinu pada  $(0, \infty)$  dengan  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \infty$ . Integral

tak wajar dari fungsi  $f$  pada selang tutup  $[0, \infty)$  adalah

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left( 2 \tan^{-1} \sqrt{x} \right)_c^1 + \lim_{b \rightarrow \infty} \left( 2 \tan^{-1} \sqrt{x} \right)_1^b \\ &= 2 \lim_{c \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{4} \pi - \tan^{-1} \sqrt{c} \right) + 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \tan^{-1} \sqrt{b} - \frac{1}{4} \pi \right) \\ &= 2 \left( \frac{1}{4} \pi - 0 \right) + 2 \left( \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{4} \pi \right) = \pi \text{ (konvergen)}. \end{aligned}$$

✚ Tunjukkan  $\int_1^{\infty} x^r dx$  konvergen jika  $r < -1$  dan divergen jika  $r \geq -1$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .

➤ Untuk kasus  $r \neq -1$ ,  $r \in \mathbb{R}$  integral tak wajarnya adalah

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} x^r dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^r dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{x^{r+1}}{r+1} \right)_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^{r+1} - 1}{r+1} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{-1}{r+1}, & \text{jika } r+1 < 0 \\ \infty, & \text{jika } r+1 > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{r+1}, & \text{jika } r < -1 \\ \infty, & \text{jika } r > -1 \end{cases} \end{aligned}$$

➤ Untuk kasus  $r = -1$ ,  $r \in \mathbb{R}$  integral tak wajarnya adalah

$$\int_1^{\infty} x^{-1} dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln x)_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$$

➤ Jadi  $\int_1^{\infty} x^r dx$  konvergen jika  $r < -1$  dan divergen jika  $r \geq -1$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .



## Aplikasi Integral tak Wajar untuk Fungsi Padat Peluang

✚ **Percobaan acak** Suatu hasil percobaan dikatakan *acak* jika bervariasi untuk beberapa percobaan tetapi untuk jangka panjang setelah sejumlah besar pengulangan hasilnya mempunyai distribusi yang teratur.

✚ **Peluang** Perbandingan munculnya kejadian dalam rangkaian percobaan jangka panjang dinamakan *peluang*. Himpunan hasil percobaan yang mungkin untuk kejadian  $A$  ditulis  $P(A)$ . Peluang dari kejadian  $A$  memenuhi sifat berikut.

1. Untuk setiap kejadian  $A$  berlaku  $0 \leq P(A) \leq 1$
2. Himpunan  $S$  dari semua hasil percobaan yang mungkin dinamakan *ruang sampel*, dan untuk  $S$  berlaku  $P(S) = 1$ .
3. Jika kejadian  $A$  dan  $B$  saling terasing (*tanpa hasil percobaan sama*), maka  $P(A \text{ atau } B) = P(A) + P(B)$ . Akibatnya, jika  $A^C$  adalah himpunan semua hasil percobaan di ruang sampel  $S$  yang bukan kejadian  $A$ , maka  $P(A^C) = 1 - P(A)$ .

✚ **Peubah acak** Suatu aturan yang mengaitkan nilai numerik dengan hasil percobaan dinamakan *peubah acak*. Sebagai ilustrasi, pelantunan sebuah koin menghasilkan munculnya muka ( $M$ ) atau belakang ( $B$ ). Jika sebuah koin dilantunkan tiga kali, ruang sampelnya adalah himpunan

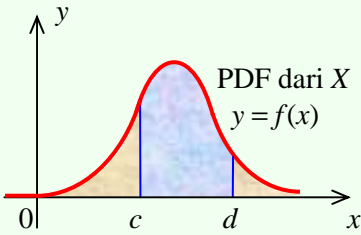
$$\{MMM, MMB, MBM, MBB, BMM, BMB, BBM, BBB\}.$$

Peubah acak  $X$  dapat didefinisikan sebagai **banyaknya muka** dalam tiga kali pelantunan koin ini. *Distribusi peluang* dari  $X$  adalah daftar semua nilai yang mungkin dari  $X$  beserta peluang yang terkait.

$x$	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Peubah acak  $X$  dikatakan *diskrit* jika himpunan nilai yang mungkin dari  $X$  adalah  $\{x_1, x_2, \dots\}$  dan dikatakan *kontinu* jika nilai  $X$  terletak pada suatu selang dari bilangan real.

✚ **PDF, fungsi padat peluang (probability density function)** PDF  $y = f(x)$  dari peubah acak kontinu  $X$  didefinisikan 0 di luar himpunan hasil percobaan yang mungkin dan bersifat (1)  $f(x) \geq 0$ , (2)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ .



$$f(x) \geq 0 \text{ dan } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x) dx$$

➤ Rata-rata dan variansi dari suatu peubah acak di-definisikan sebagai  $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$  dan

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx.$$

➤ Kaitan antara rata-rata dan variansi adalah

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

PDF dari masa pakai sebuah komponen listrik adalah  $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ ,

$\lambda$  konstanta. (1) Tunjukkan  $f$  memenuhi syarat PDF, (2) Tentukan rata-rata dan variansinya, (3) Tentukan fungsi distribusi kumulatif  $F(x) = P(X \leq x)$ , (4) Jika  $\lambda = 0,01$  dan  $t$  dalam jam, hitunglah  $P(X > 20)$ .

(1) Fungsi  $f$  memenuhi syarat PDF karena  $f(x) \geq 0$  dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -e^{-\lambda x} \right)_0^b = 1.$$

(2) Rata-rata dari peubah acaknya adalah

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \lambda x e^{-\lambda x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right)_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -b e^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Variansi dari peubah acaknya adalah

$$\begin{aligned} \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \text{ (kerjakan perhitungan teknisnya!)} \end{aligned}$$

(3) Fungsi distribusi kumulatifnya adalah

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left( -e^{-\lambda t} \right)_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

(4) Untuk  $\lambda = 0,01$ ,  $P(X > 20) = \int_{20}^{\infty} 0,01 e^{-0,01t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{20}^b 0,01 e^{-0,01t} dt \approx 0,82$ .

Tafsirannya: peluang masa pakai komponen di atas 20 jam adalah 0,82.

